

# SISTEMA DE TREINO PARA CICLISTAS

Paulo Ricardo Pinho Brandão



Departamento de Engenharia Electrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

2010



Este relatório satisfaz, parcialmente, os requisitos para elaboração da Tese, do 2º ano, do  
Mestrado de Engenharia Electrotécnica - Sistemas de Energia

Candidato: Paulo Ricardo Pinho Brandão, Nº 1030426, [1030426@isep.ipp.pt](mailto:1030426@isep.ipp.pt)

Orientação científica: Engenheiro Nuno Gomes, [NBG@isep.ipp.pt](mailto:NBG@isep.ipp.pt)



Departamento de Engenharia Electrotécnica

Instituto Superior de Engenharia do Porto

29 de Novembro de 2010



## *Agradecimentos*

Gostava de agradecer ao Engenheiro Nuno Gomes, a paciência e a disponibilidade demonstradas durante a execução deste trabalho.

Também gostava de agradecer a família e aos amigos a força e o ânimo para continuar.



## *Resumo*

No trabalho é desenvolvido um sistema de treino para ciclistas.

O sistema de treino é constituído por uma bicicleta de “Spinning”, um travão accionado electricamente, e por um sensor de velocidade, utilizado para medir a velocidade de rotação da roda de inércia.

Nos primeiros capítulos encontra-se o estudo dos vários conceitos que envolvem o sistema de treino. É realizado um estudo sobre as principais forças que actuam numa bicicleta. Outro conceito estudado é o filtro Kalman (FK). Este será importante para o controlo do sistema de treino.

O modelo do sistema de treino está dividido em duas partes. A primeira corresponde ao sistema mecânico, e a segunda o sistema de controlo e actuação. Este é constituído por um sensor de velocidade, uma unidade de estimação e o sistema de actuação do travão da bicicleta.

A unidade de estimação é composta por conjunto de filtros de Kalman que estima a velocidade, a aceleração e a posição necessárias ao cálculo da força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta.

Os resultados da simulação do sistema mostram que o sistema de treino modelado apresenta um desempenho bastante razoável. A estimação efectuada pelos filtros dos valores da velocidade, da aceleração e da posição do ciclista, permite a unidade de controlo do sistema calcular o valor da força resistente ao movimento.

## *Palavras-Chave*

Bicicleta, Ciclismo, Analise do ciclismo, Dinâmica dos veículos, força resistente ao movimento, filtro de Kalman, Simuladores, Matlab/simulink.





## *Abstract*

On this thesis is developed a cyclists training system model. The training system consists of a Spinning bike, an electrically actuated brake and a speed sensor used to measure the wheel rotation.

In the early chapters was done a study of training system concepts. The bike dynamics was studied. Another concept studied is the Kalman filter (KF). This will be important to control the training system.

The training system model is divided into two parts. The first sets out the training system mechanical part. The second defines the control and actuation system. This characterizes the speed sensor, the estimation unit and brake actuation.

The estimation unit is consists of set of Kalman filters that estimate the variables of speed, acceleration and position. These are necessary to calculate the movement resistant of the whole bike rider.

The model results show that the training system modeled performance is quite reasonable. The estimation made by the filters of the values, allows to system unit control, calculate the amount of movement resistant with accuracy.

## *Keywords*

Bicycle, Bike, Cyclist, Analytic cycling, vehicle dynamics, movement resistance force, Kalman filter, Simulator, Matlab/simulink.



# Índice

<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>I</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>III</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>V</b>
<b>ÍNDICE.....</b>	<b>VII</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>IX</b>
<b>ÍNDICE DE TABELAS.....</b>	<b>XI</b>
<b>SIMBOLOGIA.....</b>	<b>XIII</b>
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO.....	1
1.2. OBJECTIVOS .....	1
1.3. ENQUADRAMENTO .....	2
1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO .....	3
<b>2. ESTADO DA ARTE .....</b>	<b>4</b>
2.1. SIMULADORES.....	4
2.2. CONSTITUIÇÃO DO SISTEMA DE TREINO .....	7
2.3. CARACTERIZAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA .....	9
<b>3. ESTUDO DE CONCEITOS.....</b>	<b>11</b>
3.1. DINÂMICA DA BICICLETA .....	11
3.1.1 RESISTÊNCIA AERODINÂMICA .....	12
3.1.2 RESISTÊNCIA DE ROLAMENTO .....	14
3.1.3 RESISTÊNCIA DE SUBIDA.....	15
3.1.4 RESISTÊNCIA DE PERCURSO .....	15
3.1.5 DIAGRAMA DE BLOCOS DO MODELO .....	16
3.2. FILTRO DE KALMAN.....	16
3.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO .....	18
<b>4 VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS .....</b>	<b>21</b>
4.1 MODELO DA BICICLETA .....	21
4.1.1 PRIMEIRO CENÁRIO .....	27
4.1.2 SEGUNDO CENÁRIO .....	29

4.2	FILTRO DE KALMAN .....	31
4.2.1	ESTIMAÇÃO DA ACELERAÇÃO.....	33
4.2.2	ESTIMAÇÃO DA VELOCIDADE .....	35
<b>5</b>	<b>MODELO DO SISTEMA DE TREINO .....</b>	<b>38</b>
5.1	MODELO DO SISTEMA DE TREINO .....	38
5.2	ESTIMAÇÃO DA FORÇA RESISTENTE E RESULTADOS .....	42
5.2.1	ESTIMAÇÃO DA FORÇA, SEM PONDERAR A INÉRCIA .....	43
5.2.2	ESTIMAÇÃO DA FORÇA, PONDERANDO A INÉRCIA.....	46
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>50</b>
6.1	CONCLUSÃO .....	50
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO.....	51
	<b>REFERÊNCIAS DOCUMENTAIS .....</b>	<b>54</b>
	<b>ANEXO A.....</b>	<b>55</b>
	<b>ANEXO B.....</b>	<b>60</b>

## *Índice de Figuras*

Figura 1	Exemplo de uma bicicleta de “Spinning” .....	5
Figura 2	Exemplo de um sistema de treino aplicado .....	6
Figura 3	Constituição do sistema de treino. ....	7
Figura 4	Esquema do sistema de treino de ciclistas .....	8
Figura 5	Sistema de actuação do travão. ....	8
Figura 6	Sensor de velocidade. ....	9
Figura 7	Efeito das formas na deslocação de ar [3].....	13
Figura 8	Resistência de rolamento [3] .....	14
Figura 9	Diagrama de blocos do modelo .....	16
Figura 10	Cálculo da velocidade do ciclista.....	22
Figura 11	Cálculo da Resistência Aerodinâmica .....	22
Figura 12	Cálculo da Resistência de Percurso .....	23
Figura 13	Tabela que contém o perfil do percurso.....	24
Figura 14	Gráfico com o perfil do percurso .....	25
Figura 15	Cálculo da Força do ciclista.....	25
Figura 16	Velocidade do ciclista num percurso plano .....	27
Figura 17	Força resistente ao movimento num percurso plano .....	28
Figura 18	Velocidade do ciclista num percurso com subidas.....	29
Figura 19	Força resistente ao movimento num percurso com subidas .....	30
Figura 20	Estrutura dos FK na estimação de valores .....	32
Figura 21	Bloco de simulação da medida .....	32
Figura 22	Bloco FK de estimação da aceleração .....	33
Figura 23	Comparação dos valores da aceleração.....	34
Figura 24	Bloco FK que prevê o valor da velocidade .....	35
Figura 25	Comparação dos valores da velocidade .....	36
Figura 26	Diagrama de blocos do sistema de treino.....	39
Figura 27	Modelo do sistema de treino, primeira parte.....	40
Figura 28	Modelo do sistema de treino, segunda parte. ....	41
Figura 29	Modelo da bicicleta .....	42
Figura 30	Controlo sem considerar a inércia .....	43

Figura 31	Comparação das velocidades sem considerar a inércia.....	45
Figura 32	Controlo considerando a inércia .....	46
Figura 33	Comparação das velocidades, ponderando a diferença de inércia.....	48
Fluxograma do filtro de Kalman .....		58

## *Índice de Tabelas*

Tabela 1	Valores inseridos na tabela que define o perfil do percurso.....	24
Tabela 2	Valores de referência dos parâmetros do modelo .....	26

## *Acrónimos*

FK – Filtro de Kalman



## *Simbologia*

$F_{tracção}$	– Força de tracção aplicada no veículo
$F_{resistente}$	– Força que se opõe ao movimento do veículo
$M$	– Massa do veículo
$\delta$	– Componente que reflecte as parte rotativas do veículo
$\frac{dv}{dt}$	– Aceleração do veículo
$F_w$	– Resistência aerodinâmica
$\rho$	– Densidade do ar
$V_{ar}$	– Velocidade do ar relativamente ao veículo
$F_f$	– Resistência de rolamento
$P$	– Peso do veículo
$fr$	– Coeficiente de rolamento
$f_o \quad f_s$	– Factores que dependem da pressão do pneus
$V$	– Velocidade do veículo
$F_g$	– Resistência de Subida
$g$	– Constante de aceleração da gravidade
$\alpha$	– Ângulo de inclinação da estrada
$F_{estrada}$	– Resistência do percurso

$x_k$	– Vector estado (instante k)
$y_k$	– Variável medida (instante k)
$u_k$	– Variável de controlo (instante k)
$\tilde{w}$	– Erro, ruído do modelo
$\tilde{v}$	– Erro, ruído da medida
$Q$	– Matriz das covariancias dos erros de modelo
$R$	– Matriz das covariancias dos erros de medida
$A$	– Matriz transição de estados
$B$	– Matriz de controlo
$C$	– Matriz das medidas
$\hat{x}_k$	– Vector estado estimado (instante k)
$P_k$	– Matriz das variâncias do vector estado (instante k)
$\hat{x}_k^-$	– Valor previsto do vector estado (instante k)
$P_k^-$	– Valor previsto da matriz das variâncias do vector estado (instante k)
$K_k$	– Ganho de Kalman (instante k)
$V_k$	– Velocidade (instante k)
$P_k$	– Posição (instante k)
$a_k$	– Aceleração (instante k)
$w_v$	– Erro, ruído da velocidade no modelo

$w_a$	–	Erro, ruído da aceleração no modelo
$T_{ciclista}$	–	Binário gerado pelo ciclista
$T_{resistente}$	–	Binário resistente ao movimento da roda
$j$	–	Coeficiente de inércia da roda
$F_{frenagem}$	–	Força de atrito gerada pelo travão
$\mu_k$	–	Coeficiente de atrito cinético
$P_r$	–	Pressão exercida pelo travão
$F_{aplicado}$	–	Força aplicada sobre o travão
$Area$	–	Área efectiva do travão
	–	



# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO

Este documento surge no âmbito da cadeira de Dissertação do 2º ano do Mestrado de Sistemas de Energia, do Instituto Superior de Engenharia do Porto. Pretende-se que este documento explique o trabalho realizado e o seu desenvolvimento, de forma a avaliar as competências adquiridas ao longo dos últimos anos de formação.

## 1.2. OBJECTIVOS

Na tese proposta pretende-se desenvolver um sistema de treino para ciclistas. O sistema sendo estático, permite simular um percurso real com diferentes características.

O sistema baseia-se numa bicicleta de “Spinning” na qual é incluído um “travão” que permite variar a resistência sobre a roda de inércia e consequentemente sobre o pedal. O sistema inclui ainda um módulo de controlo e um sensor de velocidade que permite medir a velocidade de rotação da roda. Em cada instante o módulo de controlo necessita de

calcular a resistência a aplicar no pedal do ciclista. O cálculo entra em consideração com o estado do sistema no instante  $t-1$ , e com as características do percurso.

Para validar o sistema nesta tese será apresentado um modelo desenvolvido em Matlab / Simulink.

Para atingir o objectivo principal do trabalho é necessário passar por um conjunto de objectivos secundários, nomeadamente conceber o sistema de treino, desenvolver o sistema de treino e os algoritmos de controlo do accionamento do sistema no Matlab / Simulink e estudar o modelo do sistema de treino.

### **1.3. ENQUADRAMENTO**

Em várias áreas da sociedade verifica-se a uma competição pela excelência e qualidade. Nessas áreas as pessoas estão sujeitas a grandes níveis de exigência e de responsabilidade por isso devem estar bem preparadas.

Quer ao nível da formação, quer ao nível do treino, a utilização de simuladores pode ser bastante útil.

Os simuladores têm como objectivo simular um conjunto de condições que acontecem no mundo físico real. Estes encontram-se em ambientes controlados e permitem que as pessoas que os utilizam melhorem o seu desempenho, corrijam erros e a preparem-se para situações críticas que não seria fácil prepararem na realidade.

O uso de simuladores tem vindo a ser utilizado em diversas áreas. Encontram-se exemplos de utilização na aviação, no desporto, na medicina, entre outros. A utilização de simuladores como ferramenta de preparação e treino permite desenvolver as capacidades dos utilizadores. Um piloto de avião pode passar muitas horas dentro do simulador de avião antes de pilotar um avião real. Um piloto de fórmula um passa horas num simulador a treinar e a preparar uma estratégia de corrida.

O uso dos simuladores permite ao utilizador adquirir experiência de forma rápida, segura e económica, através do treino de situações em ambiente controlado.

Este trabalho tem como objectivo construir um simulador para o treino de ciclistas. O simulador será uma ferramenta útil para a preparação e desenvolvimento das capacidades dos ciclistas. Poderá também permitir ao treinador definir estratégias de treino com diferentes percursos e condições.

## **1.4. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO**

Nos pontos que se seguem é apresentada a estrutura da tese através dum breve resumo dos capítulos que a integra:

- No segundo capítulo é realizada uma caracterização do estado da arte. É feita uma introdução aos simuladores e uma análise da constituição e da dinâmica de um sistema de treino de ciclistas.
- No terceiro capítulo é realizada um estudo dos conceitos base do sistema de treino. É realizada uma caracterização do modelo físico da bicicleta. É feito um estudo das forças presentes na bicicleta durante um percurso. É realizado um estudo do Filtro de Kalman (FK). Este filtro será importante no controlo do sistema de treino.
- No quarto capítulo é implementado em ambiente Simulink/Matlab o modelo da bicicleta e um conjunto de filtros Kalman. Neste capítulo é feita a validação do modelo da bicicleta que servirá de referência na análise do sistema de treino. É efectuada a verificação das capacidades do filtro de Kalman (FK).
- No quinto capítulo é implementado em ambiente Simulink/Matlab o modelo de um sistema de treino de ciclistas. São apresentados resultados e feitas algumas análises.
- No sexto capítulo é realizada uma reflexão sobre o trabalho efectuado e as recomendações para trabalhos futuros a realizar com base nesta dissertação.

## 2. ESTADO DA ARTE

Neste capítulo é realizada uma caracterização do estado da arte. É feita uma introdução aos simuladores e uma análise da constituição de um sistema de treino de ciclistas.

### 2.1. SIMULADORES

Os simuladores têm como objectivo simular um conjunto de condições, que acontecem no mundo físico real. Estes são utilizados em várias áreas, encontram-se exemplos de utilização na aviação, no desporto, na medicina, etc. A utilização de simuladores como ferramenta de investigação, preparação e treino permite desenvolver as capacidades dos utilizadores.

Os simuladores podem ser classificados em função dos objectivos que se pretendem alcançar. [1]

**Simuladores de engenharia** – Utilizados para avaliar as características de veículos.

**Simuladores de treino** – Usados para treino.

**Simuladores de investigação** – Utilizados no estudo da interacção piloto/veículo.



Os simuladores podem ser utilizados como uma ferramenta de avaliação, pois permitem uma abordagem passo-a-passo.

Os simuladores de treino de ciclistas foram desenvolvidos para substituir ou complementar o treino ao ar livre.

Tendo em conta os vários fabricantes e a evolução existem diversos desenhos de simuladores de treino. Alguns exemplos:

- **Bicicletas de “Spinning”:** é utilizada nos exercícios de fitness. A resistência ao movimento desenvolvida no simulador é obtida através da acção de um travão sobre uma roda de inércia.



**Figura 1** Exemplo de uma bicicleta de “Spinning”.

- **Simulador de turbina:** consiste na aplicação de um sistema de simulação na própria bicicleta. Ao imprimir velocidade na roda faz-se girar uma turbina no sistema. Esta pode estar imersa num meio gasoso (ar) ou num meio viscoso (líquido). O sistema reproduz com grande precisão a resistência aerodinâmica. A medida que a velocidade da turbina aumenta, a resistência aerodinâmica sobe.

- **Simulador electromagnético:** consiste na aplicação de um sistema de simulação na própria bicicleta. Utiliza-se um sistema de frenagem electromagnético associado a um controlo electrónico para gerar uma resistência ao movimento. Este sistema proporciona bastante informação e possibilita um controlo completo sobre o treino.



**Figura 2 Exemplo de um sistema de treino aplicado.**

A utilização de simuladores de treino permite aos ciclistas fazer treinos de elevada qualidade, diminuindo as interrupções que surgem devido aos fenómenos alheios. Permite um controlo completo do treino possibilitando a observação dos vários parâmetros em tempo real.

Existe algumas limitações na utilização de simuladores no treino de ciclistas. A falta de deslocamento provoca aborrecimento e leva a uma menor circulação de ar pelo ciclista, o que aumenta a desidratação deste. [2]

A principal limitação dos sistemas de treino está no custo e na capacidade de simular a força resistente ao movimento. A medida que se melhora na capacidade de simular a força resistente do sistema de treino, a aquisição do equipamento torna-se dispendiosa.

## 2.2. CONSTITUIÇÃO DO SISTEMA DE TREINO

O sistema de treino de ciclismo é composto por diversos componentes que vão da mecânica à electrónica. Para construir um simulador de treino de ciclistas pode-se utilizar algumas peças já existentes no mercado.

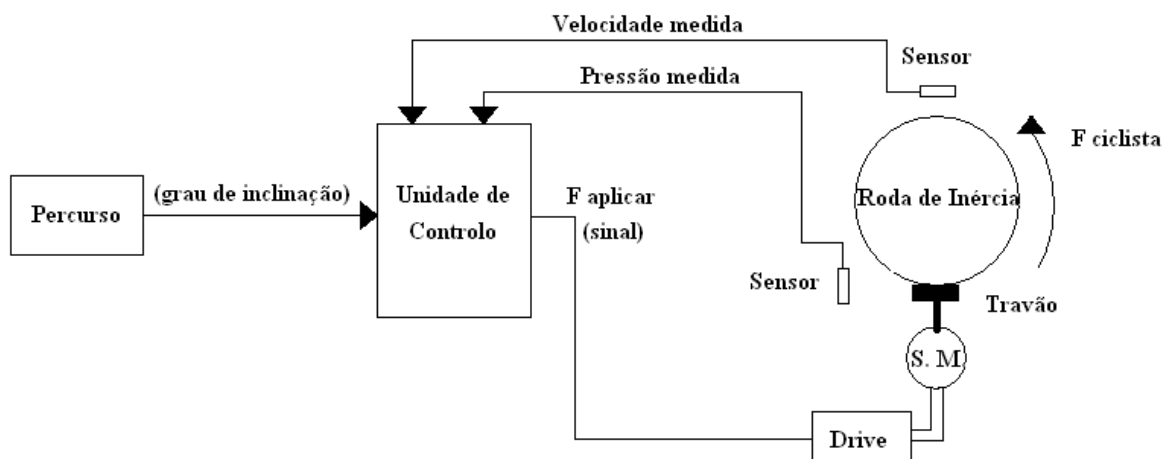
O sistema de treino desenvolvido nesta tese é baseado numa bicicleta de exercício (spinning). A força imprimida pela pessoa vai mover uma roda que possui uma determinada inércia. Para simular a carga mecânica e variar o esforço necessário ao ciclista existe um pequeno travão que gera uma força de atrito e trava o movimento da roda.



**Figura 3** Constituição do sistema de treino.

Na figura 3 é apresentado uma imagem do sistema de treino de ciclistas. Para variar a força aplicada sobre o travão utiliza-se um actuador electromecânico como um servo motor acoplado a um parafuso sem fim.

Na figura 4 é apresentado um esquema base de um sistema de treino de ciclistas.

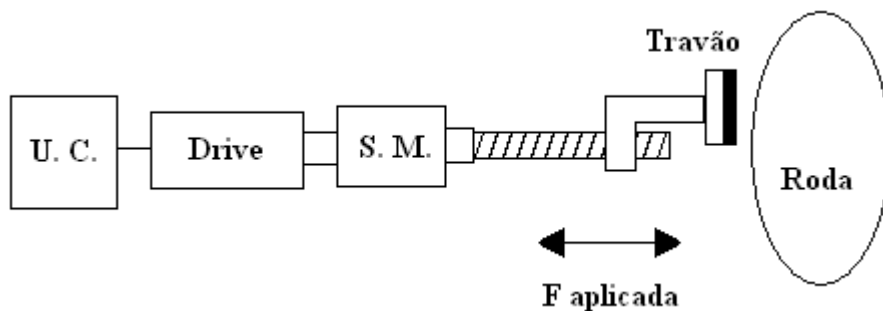


**Figura 4** Esquema do sistema de treino de ciclistas

Na figura 4 é demonstrado um esquema simples de um sistema de treino. Ao aplicar um determinado sinal no servomotor este gira num sentido levando o parafuso sem fim a rodar. Este ao rodar exerce uma pressão superior sobre o travão aumentando o atrito e limitando o movimento da roda do simulador. Se aplicar um sinal contrário, o servo motor juntamente com o parafuso roda em sentido contrário e a pressão sobre o travão diminui.

O sinal que indica a direcção do servo motor vem de uma unidade de controlo. Esta unidade estima os valores da força resistente ao movimento em função da velocidade medida na roda do simulador. Em função destes valores a unidade envia um sinal para uma “drive” que actua sobre o servo motor.

Na figura 5 é demonstrado o sistema de actuação do travão do sistema de treino.

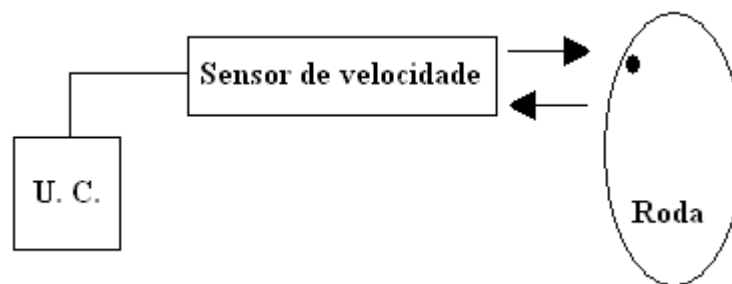


**Figura 5** Sistema de actuação do travão.

O controlo do sistema pode ser executado num pequeno microprocessador devidamente programado para estimar os valores da força em função da velocidade medida e em função dos valores dos ângulos de inclinação presentes no perfil do percurso e nas características do próprio percurso (ex. tipo de terreno).

Neste trabalho a estimação de valores é feita utilizando filtros de Kalman (FK). Estes filtros serão usados para estimar o valor da aceleração, da velocidade e da posição do ciclista em cada ponto do percurso.

Na figura 6 é demonstrado o sensor que faz leituras dos valores de velocidade.



**Figura 6 Sensor de velocidade.**

Este sensor é óptico. O sensor detecta a passagem de um ponto na roda e envia um impulso para a unidade de controlo. Esta contabiliza o tempo entre os impulsos e calcula a velocidade da roda de inércia do sistema.

É utilizado um sensor para medir a pressão exercida pelo travão sobre a roda. Através de um sensor piezoelectrico a unidade de controlo calcula a pressão exercida pelo travão. Este valor permite a unidade de controlo determinar o movimento do servo motor.

## **2.3. CARACTERIZAÇÃO DO MODELO DO SISTEMA**

Para modelar uma bicicleta de exercício, a base do sistema de treino, é realizado o estudo da dinâmica presente na roda de inércia e caracterizado fisicamente o atrito gerado pelo travão que limita a velocidade da roda.

A equação que traduz o sistema constituído pela bicicleta e ciclista é dada por:

$$T_{ciclista} - T_{atrito} = j \frac{dw}{dt} \quad (1)$$

A aceleração angular ( $\frac{dw}{dt}$ ) da roda é igual ao binário aplicado pelo ciclista ( $T_{ciclista}$ ) menos o binário atrito ( $T_{atrito}$ ) gerado pelo sistema de travagem a dividir pelo coeficiente de inércia da roda ( $j$ ).

O binário de atrito resulta da aplicação de uma força de atrito sobre a roda de inércia.

$$T_{atrito} = F_{atrito} \text{ raio} \quad (2)$$

O binário de atrito é igual a força de atrito ( $F_{atrito}$ ) vezes o raio da roda de inércia ( $\text{raio}$ ).

A força de atrito gerada pelo travão é dada por:

$$F_{atrito} = \text{Pr} \mu_K \quad (3)$$

A força de atrito gerada é igual á pressão exercida sobre o calço ( $\text{Pr}$ ) multiplicada pelo coeficiente de atrito cinético ( $\mu_k$ ) resultante dos materiais presentes da roda e do “calço”.

A pressão exercida é igual:

$$\text{Pr} = \frac{F_{aplicada}}{\text{Area}} \quad (4)$$

A pressão exercida depende da área do “calço” ( $\text{Area}$ ) e da força aplicada sobre o travão ( $F_{aplicada}$ ).

A força a aplicar pelo actuador sobre o travão varia em função das características físicas dos elementos presentes no sistema de travagem. O tipo de material utilizado, a área do “calço” e o posicionamento deste em relação ao eixo da roda influenciam o valor da força a aplicar sobre o travão.

# 3. ESTUDO DE CONCEITOS

Neste capítulo é realizada um estudo dos conceitos base do sistema de treino. É realizada uma caracterização do modelo físico da bicicleta. É realizado um estudo do Filtro de Kalman (FK). Este filtro será um componente importante no controlo do sistema.

## 3.1. DINÂMICA DA BICICLETA

O objectivo do estudo do modelo físico é obter valores de aceleração, velocidade e posição de uma bicicleta em cada instante de um determinado percurso. Para descrever o movimento da bicicleta, aplica-se a segunda lei de Newton. [3]

A equação que resume as forças presentes no sistema dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\Sigma F_{tracção} - \Sigma F_{resistentes}}{\delta M} \quad (5)$$

A aceleração imprimida ao veículo ( $\frac{dv}{dt}$ ) é igual ao somatório das forças de tracção exercidas ( $\Sigma F_{tracção}$ ) menos o somatório das forças resistentes ao movimento ( $\Sigma F_{resistentes}$ ) a dividir pela massa do veículo ( $M$ ) e uma componente que reflecte o momento de inércia das partes rotativas do veículo ( $\delta$ ).

Neste trabalho a força de tracção é efectuada pelo ciclista e permite a aceleração da bicicleta. A massa do veículo resulta do conjunto ciclista mais bicicleta. É desprezado o valor da componente que reflecte o momento de inércia das partes rotativas da bicicleta.

As forças resistentes ao movimento a considerar são:

- Resistência aerodinâmica
- Resistência de rolamento
- Resistência de subida

### **3.1.1 RESISTÊNCIA AERODINÂMICA**

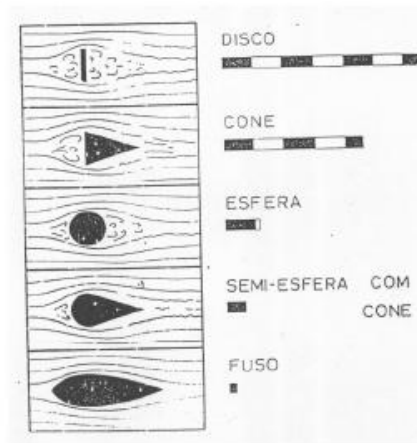
Um veículo ao deslocar-se através do ar sofre acção de uma força que se opõe ao movimento. Esta força resulta de essencialmente de duas componentes:

- Resistência de forma
- Resistência de fricção

A Resistência de forma está associada a forma do veículo. O veículo ao deslocar-se através do ar cria bolsas de ar de alta pressão na frente do veículo e bolsas de baixa pressão atrás do veículo. Estas bolsas surgem devido ao facto do ar não se mover instantaneamente.



Na figura 7 é apresentado o efeito das formas de um objecto que se desloca no ar.



**Figura 7 Efeito das formas na deslocação de ar [3]**

Na figura 7 é apresentado um esquema que demonstra o efeito das formas de objecto na deslocação do ar.

A Resistência de fricção é influenciada pela rugosidade da superfície e pela velocidade do veículo. As moléculas de ar suficientemente longe do veículo encontram-se paradas. Por oposição as moléculas de ar junto ao veículo deslocam-se á velocidade do mesmo.

A diferença de velocidade entre as moléculas resulta em choques que se traduzem numa resistência de fricção.

A Resistente Aerodinâmica é dada por:

$$F_w = \frac{1}{2} \rho A_{frontal} C_D (V_{ar})^2 \quad (6)$$

A Resistência Aerodinâmica ( $F_w$ ) está relacionada com a velocidade do veículo relativamente ao ar ( $V_{ar}$ ), a área frontal ( $A_{frontal}$ ), o coeficiente aerodinâmico do veículo ( $C_D$ ).

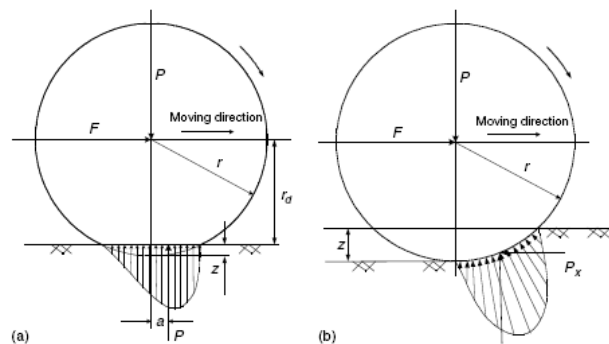
Os valores típicos do coeficiente aerodinâmico de um motociclo podem variar entre 0,6 e 0,7 e de um camião podem variar entre 0,8 e 1,5. [3]

Nas bicicletas, o valor típico do coeficiente aerodinâmico do conjunto ciclista bicicleta é próximo de 0,5. [14]

### 3.1.2 RESISTÊNCIA DE ROLAMENTO

A Resistência de Rolamento está associada ao movimento do pneu com o solo. As forças de reacção do solo não são uniformes o que provoca uma deformação no solo e no pneu. Este fenómeno gera uma força que opõe ao movimento do veículo.

Na figura 8 é apresentado o efeito da deformação no pneu, a Resistência de rolamento.



**Figura 8 Resistência de rolamento [3]**

Na figura 8 é apresentado uma figura que demonstra o efeito da reacção do solo sobre o pneu.

Quanto maior for a deformação do solo, maior será a resistência de rolamento. A resistência de rolamento é dada por:

$$F_f = P f r \quad (7)$$

A resistência de rolamento ( $F_f$ ) será proporcional ao valor do peso do veículo ( $P$ ) multiplicado por um coeficiente de rolamento ( $f r$ ). A que ter em consideração que se trata de uma aproximação.

O coeficiente de rolamento é uma grandeza adimensional que reflecte as características do pneu (material, forma de construção, pressão) e das características do solo (rugosidade, tipo de solo). A velocidade também influencia o coeficiente de rolamento. Não existe uma equação que traduza de forma eficaz os valores do coeficiente de rolamento. Contudo

através da observação experimental é possível definir algumas expressões empíricas, que estabelecem uma relação entre coeficiente de rolamento e a velocidade. O coeficiente de rolamento para pneus de automóvel e velocidades inferiores a 130km/h, é dado por:

$$fr = 0.01 \left( 1 + \frac{V}{100} \right) \quad (8)$$

Valores típicos de um pneu de carro em contacto com asfalto é de 0,013 e com a terra é de 0,05.

Através de pesquisa constatou-se que os construtores de pneus de bicicleta anunciam coeficientes de rolamento muito baixos (cerca de 0,003) para pneus de estrada. [14]

### 3.1.3 RESISTÊNCIA DE SUBIDA

A Resistência de Subida existe quando um veículo percorre uma estrada com um determinado ângulo de inclinação. Existe uma variação da energia potencial do veículo. Uma componente do peso reflecte-se no eixo horizontal e afecta a relação entre as forças de tracção e de resistência. A Resistência de Subida é dada por:

$$F_g = M g \sin \alpha \quad (9)$$

A resistência de subida ( $F_g$ ) é igual a massa do veículo ( $M$ ) multiplicada pela aceleração da gravidade ( $g$ ) e pelo seno do ângulo de inclinação da estrada ( $\sin \alpha$ ).

### 3.1.4 RESISTÊNCIA DE PERCURSO

A Resistência de Percurso é dada por:

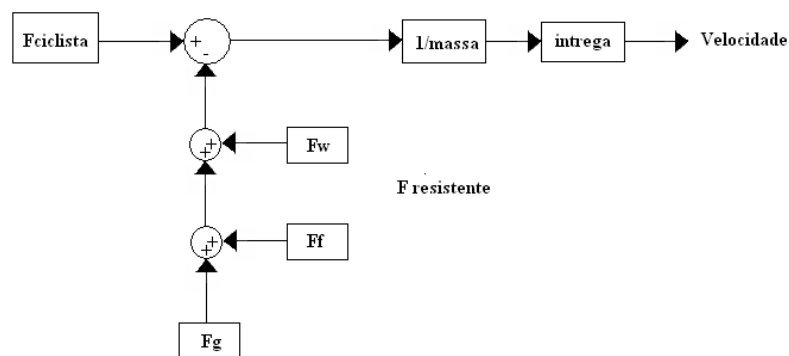
$$F_{percurso} = M g (fr \cos \alpha + \sin \alpha) \quad (10)$$

A Resistência de Percurso ( $F_{percurso}$ ) é igual a soma da resistência de rolamento e da resistência de subida.

### 3.1.5 DIAGRAMA DE BLOCOS DO MODELO

As forças resistentes definidas anteriormente são as que tem maior impacto no movimento do ciclista e da bicicleta.

Na figura 9 é apresentado um diagrama de blocos do modelo físico que representa as forças que actuam sobre uma bicicleta.



**Figura 9 Diagrama de blocos do modelo**

Na figura 9 é demonstrado um diagrama de blocos que descreve as forças que estão presentes no conjunto ciclista bicicleta.

O objectivo do modelo físico da bicicleta é obter valores referência da velocidade de um ciclista.

Com base neste diagrama apresentado, pode-se construir um modelo físico que caracterize a dinâmica presente no movimento do ciclista e da bicicleta durante um percurso.

## 3.2 FILTRO DE KALMAN

O filtro é uma componente importante no controlo do sistema de treino.

A unidade de controlo do simulador de treino necessita de calcular em cada instante a resistência a aplicar no pedal do ciclista. O cálculo entra em consideração com o estado do sistema no instante t-1, e com as características do percurso. A utilização do FK permite estimar as variáveis do sistema no instante t.

Em 1960 o Sr. Kalman publicou um artigo com a descrição de um método de resolução de problemas lineares. O FK surgiu na área da engenharia electrotécnica e é muito usado em sistemas de controlo.

O FK não é mais do que um conjunto de equações que resultam num processo recursivo de estimação, que minimiza o erro quadrático. A sua dinâmica consiste na repetição de ciclos de previsão e correcção dos valores de um conjunto de variáveis.

O FK é aplicável quando o sistema pode ser descrito na forma espaço-estado.

$$x_k = A x_{k-1} + B u_{k-1} + \tilde{w} \quad (11)$$

$$y_k = C x_k + \tilde{v} \quad (12)$$

A equação 11 representa o modelo do sistema. O vector estado ( $x_k$ ) contém os valores das variáveis do sistema, num instante k. A matriz A representa a transição do sistema entre instantes k-1 e k. A matriz B quantifica a influência de uma variável de controlo ( $u_{k-1}$ ) no sistema. O ruído do modelo ( $\tilde{w}$ ) quantifica os erros associados a construção do modelo.

A equação 12 representada o modelo da medida. O vector das medidas ( $y_k$ ) contém os valores medidos de uma variável e a matriz C faz relação com as variáveis do vector estado no instante k. O ruído de medição ( $\tilde{v}$ ) quantifica os erros associados ao equipamento de medição.

O filtro estima os valores das variáveis de estado em função dos valores dessas variáveis no instante anterior e dos valores medidos para essas variáveis. O filtro também permite a estimação de parâmetros não observáveis.

O FK tem uma implementação relativamente simples com poucos requisitos a nível computacional. Por estas razões pode ser utilizado em sistemas embebidos.

No anexo A deste relatório é explicado o princípio de funcionamento do filtro de Kalman.

### 3.2.1 IMPLEMENTAÇÃO DO FILTRO

O FK é adequado para a estimação dos parâmetros associados ao sistema de treino. Para o efeito considera-se um veículo em movimento uniformemente acelerado. A velocidade será a variável medida. Considera-se que o sistema modelado é linear e está descrito na forma de espaço-estado. [8]

Para criar o modelo do filtro que define as variáveis da posição, velocidade e aceleração é necessário recorrer as leis que caracterizam um movimento unidimensional. As equações que caracterizam a velocidade e o posicionamento do veículo são as seguintes:

$$V_{k+1} = V_k + a_k t + \tilde{w}_v \quad (13)$$

$$P_{k+1} = P_k + t V_k + 1/2 t^2 a_k + \tilde{w}_p \quad (14)$$

Em que o “ $t$ ” representa o tempo entre os instantes ( $k$  e  $k+1$ ) e o “ $\tilde{w}_v$ ” e o “ $\tilde{w}_p$ ”, representa os ruídos presentes na velocidade e na posição do veículo.

No primeiro filtro realiza-se a estimação dos valores da aceleração (variável não observável). As equações que caracterizam o sistema são as seguintes:

$$V_k = t V_{k-1} + \tilde{w}_v \quad (15)$$

$$a_k = a_{k-1} + \tilde{w}_a \quad (16)$$

As equações espaço-estado que caracterizam o sistema são:

$$x_k = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} x_{k-1} + \tilde{w} \quad (17)$$

$$y_k = [1 \quad 0] x_k + \tilde{v} \quad (18)$$

O vector estado é constituído pelas variáveis velocidade e aceleração.

$$x_k = \begin{bmatrix} V_k \\ a_k \end{bmatrix} \quad (19)$$

A matriz (A) representa a transição entre os instantes  $k-1$  e  $k$ , das variáveis do vector estado.

$$A = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

A matriz (C) representa a variável do vector estado que é utilizada como medida.

$$C = [1 \quad 0] \quad (21)$$

A variável de controlo não existe e a matriz de controlo é igual a zero.

Além da matriz de transição (A) e da matriz medida (C) é necessário calcular as matrizes das covariâncias dos erros associados ao modelo (Q) e da covariância dos erros associados aos valores medidos (R).

No caso da medida da velocidade considera-se que o erro associado é de 0,02 m/s. Como só são feitas medições relativas a uma variável a matriz da covariância dos erros associados à medição é dada por:

$$R = [(0,02)^2] \quad (22)$$

Para calcular a matriz das covariâncias dos erros associados ao modelo considera-se que o erro da velocidade ( $\tilde{w}_v$ ), no modelo, é de 0,01 m/s. O erro da aceleração ( $\tilde{w}_a$ ) será dada por:

$$\tilde{w}_a = \frac{\tilde{w}_v}{t} \quad (23)$$

A matriz das covariâncias dos erros associados ao modelo será dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} w_v^2 & w_v w_a \\ w_v w_a & w_a^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Com estes parâmetros é possível utilizar o filtro para estimar o valor da aceleração, em função dos valores medidos da velocidade.

O segundo filtro é utilizado para fazer previsão de valores da velocidade no instante  $k + 1$ . Para tal socorre-se do modelo implementado no filtro:

$$V_{k+1} = V_k + a_k t + \tilde{v} \quad (25)$$

As equações espaço-estado que caracterizam o sistema são:

$$x_{k+1} = [1]x_k + [t]u_k + \tilde{w} \quad (26)$$

$$y_k = [1]x_k + \tilde{v} \quad (27)$$

O vector estado é constituído pela velocidade.

$$x_{k+1} = [V_k] \quad (28)$$

As matrizes de transição e de medida são iguais a um. A matriz de controlo é dada por:

$$B = [t] \quad (29)$$

A variável de controlo considerada é a aceleração.

Considerando o mesmo erro de medida da velocidade (0,02 m/s) a matriz da covariancia do erro associado a medida é dada:

$$R = [(0,02)^2] \quad (22)$$

A matriz da covariancia dos erros associados ao modelo é dado por

$$Q = [w_v^2] = [(0,01)^2] \quad (30)$$

Neste segundo filtro existe a capacidade de prever os valores da velocidade tendo em conta os valores medidos e o valor da aceleração (variável de controlo).



# 4 VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

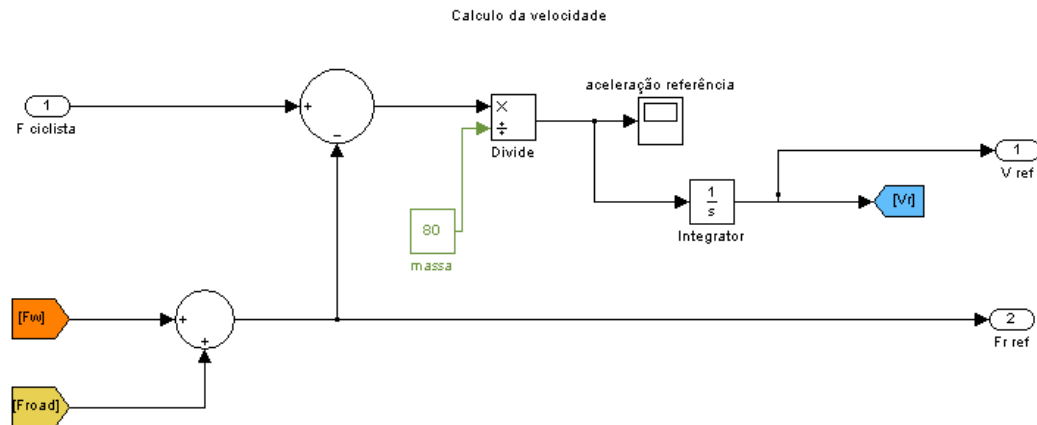
No quarto capítulo é implementado em ambiente Simulink/Matlab um modelo da bicicleta e um conjunto de filtros Kalman. Neste capítulo é feita a validação do modelo da bicicleta que servirá de referência na análise do sistema de treino. É efectuada a verificação das capacidades do filtro de Kalman (FK).

## 4.1 MODELO DA BICICLETA

Nesta secção é feita uma validação do modelo da bicicleta apresentado no terceiro capítulo. Para o efeito é realizada uma implementação do modelo no Matlab / Simulink. O modelo da será importante para a análise do sistema de treino.

De seguida são apresentados os blocos que compõem o modelo da bicicleta.

Na figura 10 é apresentado o bloco responsável pelo cálculo da velocidade.

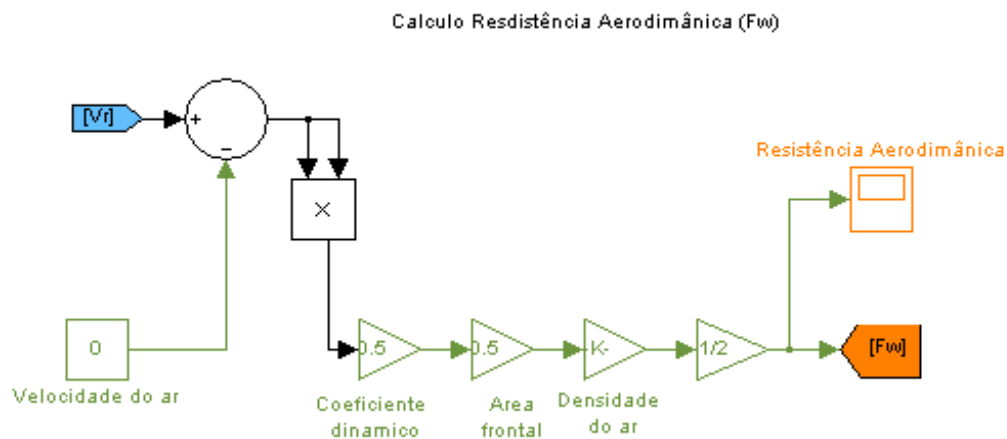


**Figura 10 Cálculo da velocidade do ciclista**

Como se observa na figura 10 é considerada a soma da força do ciclista ( $F_{ciclista}$ ) e da resistência total ao movimento ( $F_w + F_{road}$ ) presentes no conjunto ciclista bicicleta. O resultado da diferença das forças a dividir pela massa do conjunto ciclista bicicleta é o valor da aceleração imprimida pelo ciclista. Integrando a aceleração obtêm-se os valores da velocidade do ciclista. Os valores produzidos neste modelo serão utilizados como referência na análise do desempenho do sistema de treino modelado.

É importante analisar os blocos que calculam as resistências Aerodinâmica e de Percurso. Os modelos destas resistências têm por base os cálculos apresentados no capítulo 3.

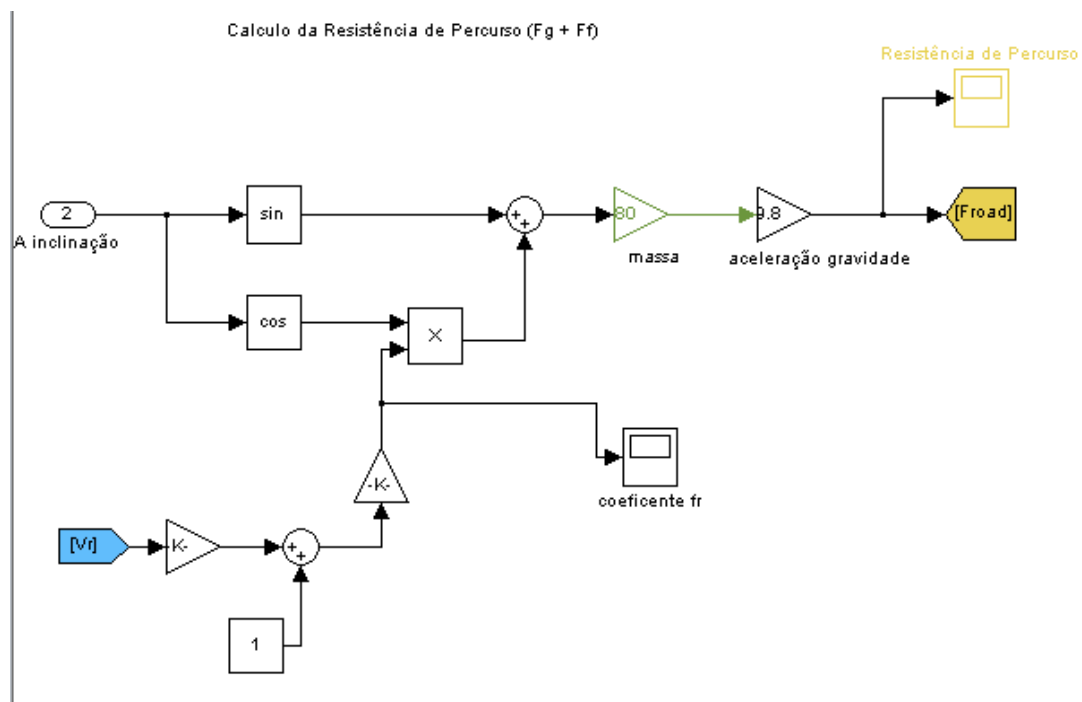
Na figura 11 é apresentado o bloco responsável pelo cálculo da Resistência Aerodinâmica.



**Figura 11 Cálculo da Resistência Aerodinâmica**

Como se observa na figura 11 é efectuado o calculado a resistência aerodinâmica. Considera-se que a velocidade do ar é igual a zero. Os valores do coeficiente de aerodinâmica e da área frontal do conjunto ciclista bicicleta e a densidade do ar são demonstrados na tabela 2.

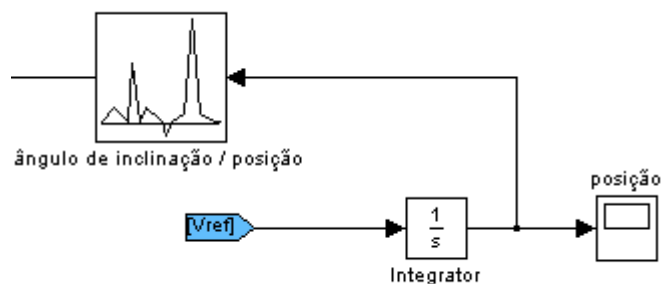
Na figura 12 é apresentado o bloco responsável pelo cálculo da Resistência de Percurso



**Figura 12 Cálculo da Resistência de Percurso**

Como se observa na figura 12 é efectuado o calculado a resistência de Percurso O coeficiente de rolamento utilizado no cálculo é considerado muito baixo, na ordem de 0,003. Os ângulos de inclinação associados às subidas e descidas da estrada são fornecidos por uma tabela que guarda o perfil do percurso.

Na figura 13 está apresentado o bloco que produz o perfil do percurso.



**Figura 13 Tabela que contém o perfil do percurso**

Como se observa na figura 13 é demonstrado a tabela que contém os dados sobre o perfil do percurso

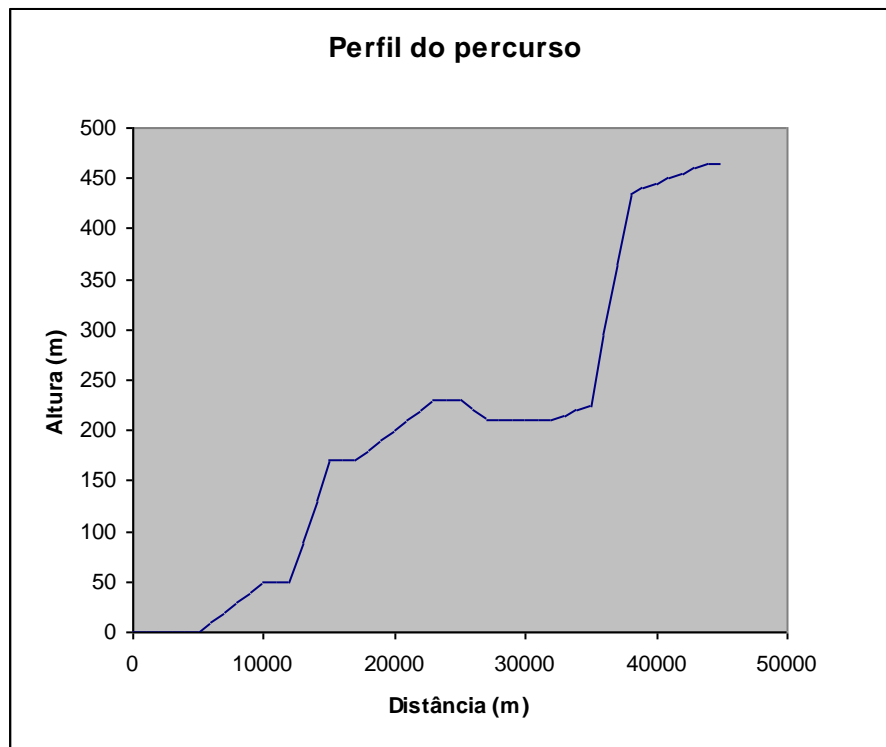
A tabela 1 contém o perfil do percurso utilizado nos testes. A tabela indica os quilômetros nos quais ocorre uma alteração da inclinação.

**Tabela 1 Valores inseridos na tabela que define o perfil do percurso**

Distância (Km)	0	5	10	12	15	17	23	25	27	32	35	38	44
Ângulo de inclinação (rad)	0.00	0.01	0.00	0.04	0.00	0.01	0.00	- 0.01	0.00	0.005	0.07	0.005	0.00

Normalmente, os valores dos ângulos de inclinação que estão presentes numa estrada variam entre os 0 e 0,07 radianos (0° e 4°) ou em percentagem de inclinação de 0 a 7%. [12]

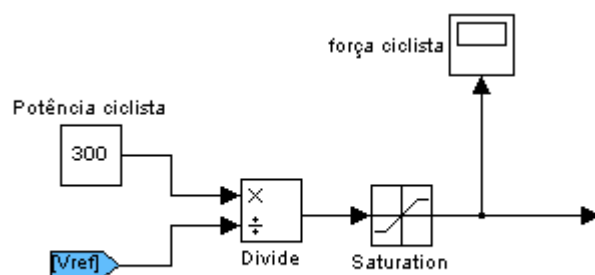
Na figura 14 está representado o perfil do percurso utilizado no estudo do modelo da bicicleta, realizado neste capítulo.



**Figura 14 Gráfico com o perfil do percurso**

Como se observa na figura 14 é demonstrado o gráfico que descreve o perfil do percurso utilizado na análise do modelo da bicicleta.

Na figura 15 está representado bloco que reproduz a força aplicada pelo ciclista.



**Figura 15 Cálculo da Força do ciclista**

Como se observa na figura 15 é efectuado o cálculo da força exercida pelo ciclista sobre os pedais da bicicleta. É difícil modelar a força do ciclista. Para o cálculo da força recorre-se a utilização de valores referência da potência que um ciclista pode produzir e divide-se pela velocidade.

Um ciclista profissional pode gerar entre 300 a 400 Watt de potência, sendo que uma pessoa sem preparação pode gerar de 150 a 200 Watt.

Deve-se ter em conta que a força do ciclista modelada é uma aproximação. A força produzida não é constante e tende a diminuir com o tempo.

A tabela 2 apresenta valores de referência para os parâmetros das forças.

**Tabela 2 Valores de referência dos parâmetros do modelo**

Potencia do ciclista (W)	Massa ciclista + bicicleta (Kg)	Ângulo de inclinação da estrada (rad)	Coefficiente aerodinâmico	Área frontal (m <sup>2</sup> )	Velocidade do ar (m/s)	Densidade do ar (Kg/m <sup>3</sup> )
300 - 400	80	0 - 0,3	0,5	0,5	0	1,226

Para encontrar os valores das variáveis presentes no cálculo da Resistência de Percurso, da Resistência Aerodinâmica e a Força do ciclista, realizou-se uma pesquisa. [14]

Para avaliar o desempenho do modelo da bicicleta definido no capítulo anterior foi realizado um conjunto de simulações.

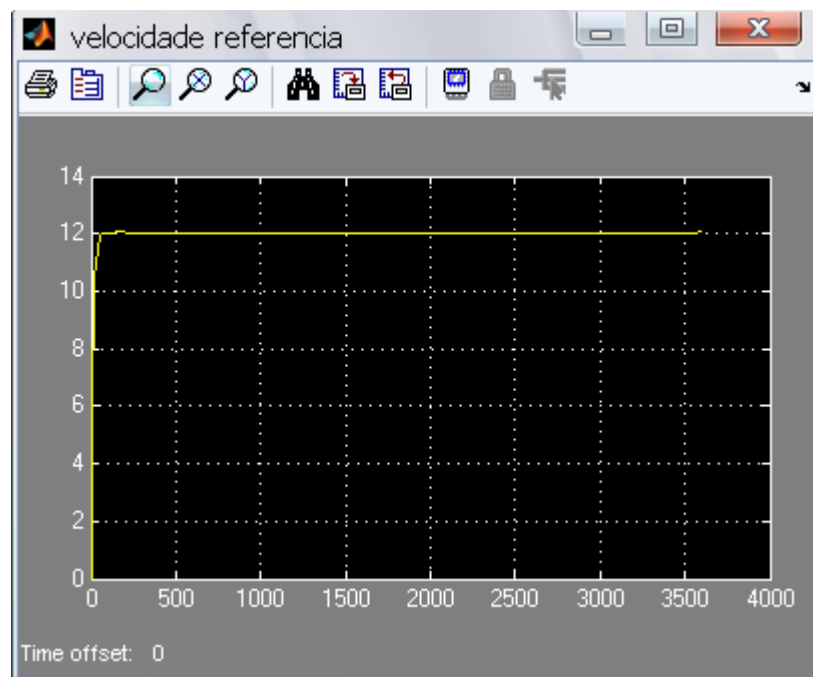
São definidos dois cenários com perfis de percurso diferentes. Em cada um dos cenários são avaliados os valores da velocidade atingida pelo ciclista e a força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta.

Este estudo tem por objectivo validar o modelo da bicicleta, desenvolvido no Matlab / Simulink.

### 4.1.1 PRIMEIRO CENÁRIO

No primeiro cenário considerou-se que o ciclista circula num percurso cujo perfil é horizontal, ou seja, os ângulos de inclinação são iguais a zero.

Na figura 16 é apresentado um gráfico com a velocidade do ciclista no modelo, ao longo do tempo, num percurso plano.



**Figura 16 Velocidade do ciclista num percurso plano**

O gráfico da figura 16 relaciona a velocidade do ciclista (m/s), situada no eixo das ordenadas, com o tempo de percurso (segundos), situado no eixo das abcissas. Como se observa na figura a velocidade estabiliza num valor de 12 m/s (43 km/h).

A estabilização da velocidade justifica-se pelo facto da aceleração presente no conjunto ciclista bicicleta ser nula.

Esta aceleração nula resulta da igualdade entre a força produzida pelo ciclista e a força resistente ao movimento. Como a força produzida pelo ciclista é constante, pode-se dizer que a força resistente de estrada é constante.

Na figura 17 é apresentado um gráfico com a força resistente ao movimento, ao longo do tempo, num percurso plano.



**Figura 17 Força resistente ao movimento num percurso plano**

O gráfico da figura 17 relaciona a força resistente ao movimento (N), situada no eixo das ordenadas, com o tempo de percurso (segundos), situado no eixo das abscissas. Como se observa na figura a força resistente total ao movimento estabiliza no valor de 25 N.

Como a força resistente ao movimento é constante, pode-se dizer que as duas componentes, as resistências de percurso e de aerodinâmica, também são constantes. Sabe-se que o aumento da velocidade do ciclista faz subir a resistência aerodinâmica. A resistência aerodinâmica limita progressivamente o aumento da velocidade, tendo em consideração o valor constante da força exercida pelo ciclista.

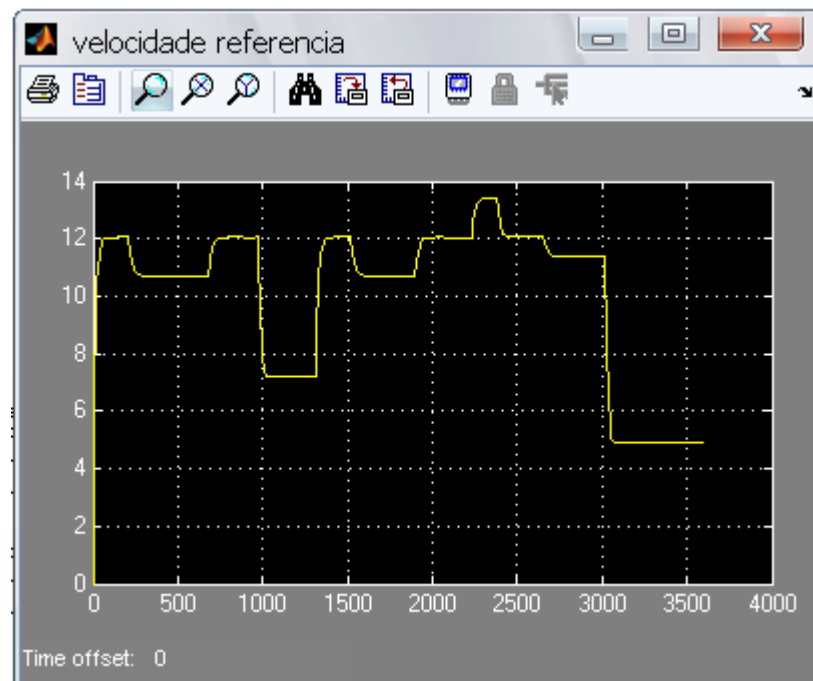


### 4.1.2 SEGUNDO CENÁRIO

No segundo cenário considera-se que ciclista percorre uma estrada com determinado perfil de percurso.

O perfil de percurso utilizado neste segundo cenário foi apresentado na figura 15, neste capítulo. Ao longo do percurso existe varias subidas e uma descida, ou seja, vários ângulos de inclinação do percurso.

Na figura 18 é apresentado um gráfico com a velocidade do ciclista no modelo, ao longo do tempo, num percurso com várias subidas e uma descida.

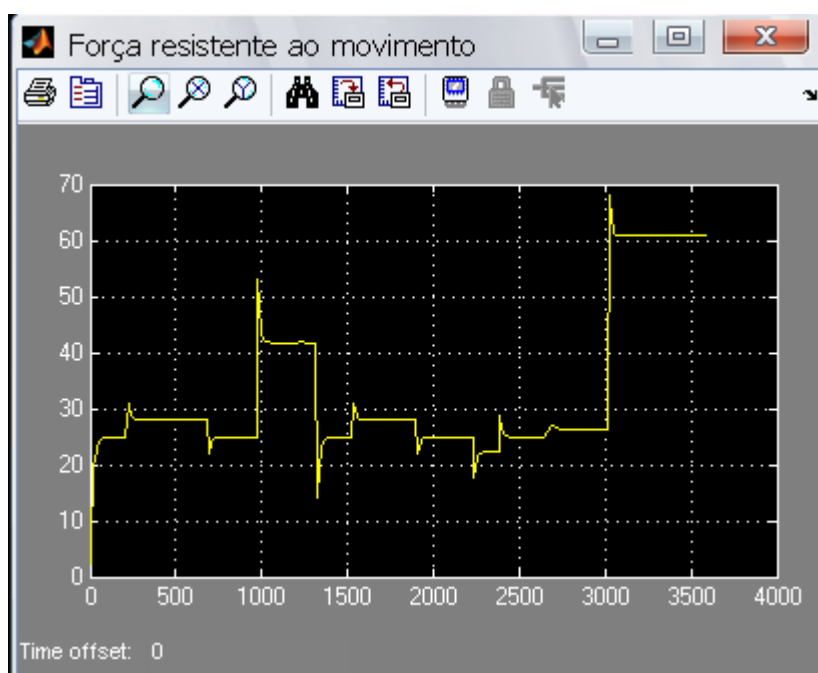


**Figura 18 Velocidade do ciclista num percurso com subidas**

O gráfico da figura 18 relaciona a velocidade do ciclista (m/s), situada no eixo das ordenadas, com o tempo de percurso (segundos), situado no eixo das abcissas. Como se observa na figura a velocidade varia entre 0 e 13 m/s (46 km/h).

Como uma parte da massa do conjunto ciclista e bicicleta é reflectida no eixo horizontal, esta produz desacelerações e acelerações na velocidade do ciclista.

Na figura 19 é apresentado um gráfico com a força resistente ao movimento, ao longo do tempo, num percurso com várias subidas e uma descida



**Figura 19 Força resistente ao movimento num percurso com subidas**

O gráfico da figura 19 relaciona a força resistente ao movimento (N), situada no eixo das ordenadas, com o tempo de percurso (segundos), situado no eixo das abcissas. Como se observa na figura a força resistente total ao movimento oscila entre valores de 0 e 70 N.

A força resistente ao movimento varia ao longo do tempo. Esta variação surge do facto da Resistência de Percurso variar.

Como a velocidade do ciclista não é constante, a Resistência Aerodinâmica também oscila.

Observa-se no gráfico que a força resistente ao movimento apresenta picos.

Estes picos surgem devido a duas considerações feitas no modelo da bicicleta. A primeira é a utilização de uma força produzida pelo ciclista constante.

A segunda consideração consiste na utilização de ângulos de inclinação no perfil do percurso. A variação rápida dos valores dos ângulos utilizados introduz variações rápidas na resistência de percurso.

Este pico no valor da força resistente ao movimento acontece na realidade, mas com menor intensidade.

Esta variação rápida da força é explicada pela inércia presente no conjunto ciclista bicicleta. Quando se passa de um plano horizontal para uma subida, a velocidade do ciclista reduz-se. Neste período de transição o valor das Resistências Aerodinâmico e de Percurso é alto. Com um valor alto, a força resistente ao movimento produz uma desaceleração forte na velocidade do ciclista.

Durante os 3600 segundos de simulação do modelo da bicicleta observa-se que o ciclista pode atingir uma velocidade 13 m/s (46 km/h) e percorrer uma distância próxima de 40 km.

Os valores apresentados nas simulações estão em concordância com os valores pesquisados na Internet e observados nas provas de ciclismo. [10]

Através da análise dos resultados chega-se a conclusão que o modelo da bicicleta faz uma boa representação da realidade, apesar das simplificações, nomeadamente considerar que a potência debitada pelo ciclista e o coeficiente de rolamento do pneu são constantes e a não consideração de outros fenómenos presentes na bicicleta.

Os valores da velocidade e da força resistente ao movimento produzidos no modelo da bicicleta serviram de referência na análise do desempenho do sistema de treino modelado.

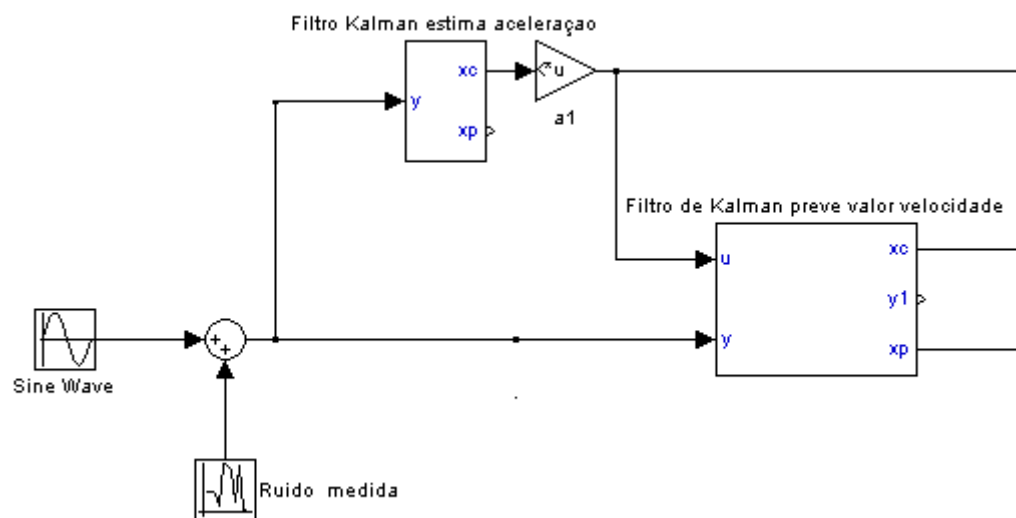
## **4.2 FILTRO DE KALMAN**

Nesta secção é feita uma verificação das capacidades do filtro de Kalman, estudado no terceiro capítulo. Para o efeito é realizada uma implementação do filtro no Matlab / Simulink. Será utilizado uma estrutura com dois filtros.

O filtro de Kalman será utilizado na estimação de valores da força resistente ao movimento. Estes valores serão utilizados pela unidade de controlo do sistema de treino.

De seguida são apresentados os blocos que compõem o modelo de demonstração da eficiência dos filtros.

Na figura 20 é apresentado um modelo que utiliza dois filtros de Kalman. Um filtro faz a estimação da aceleração e outro faz a previsão da velocidade.

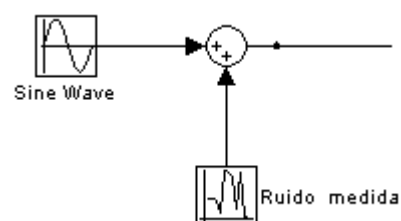


**Figura 20 Estrutura dos FK na estimação de valores**

Na figura 20 é apresentada uma estrutura dos filtros de Kalman. Com esta estrutura é possível estimar os valores da aceleração e da velocidade através de valores medidos da velocidade.

Será feito um conjunto de simulações para analisar e validar as capacidades do filtro na estimação de valores.

Na figura 21 é apresentado um bloco que gera os valores de velocidade. Estes "valores medidos" vão alimentar as entradas dos filtros.



**Figura 21 Bloco de simulação da medida**

Na figura 21 é apresentado um bloco que simula um conjunto de valores de velocidade medidos através de um equipamento de medição.

Através da soma de dois blocos cria-se um sinal com ruído que gera os valores “medidos” de referência para os filtros. Para o efeito utiliza-se uma fonte que gera um sinal sinusoidal e uma fonte que gera valores aleatórios dentro de um determinado limite. A soma destes sinais permite simular um conjunto de valores medidos através de um equipamento de medição.

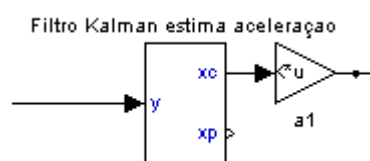
Considera-se que os valores gerados representam um conjunto de valores medidos de velocidade. Estes valores variam entre 10 m/s e -10 m/s. O ruído introduzido pelo equipamento de medição varia entre 0,0% e 0,1% dos valores da velocidade.

Foram realizadas algumas simulações com objectivo de comparar os valores estimados pelo filtro para a aceleração e velocidade com os valores gerados como referência para os filtros.

Para a efectuar a análise são comparados os valores estimados pelos filtros com os valores de referência utilizados neste modelo.

#### 4.2.1 ESTIMAÇÃO DA ACELERAÇÃO

Na figura 22 é apresentado o bloco do filtro que faz a estimação da aceleração



**Figura 22 Bloco FK de estimação da aceleração**

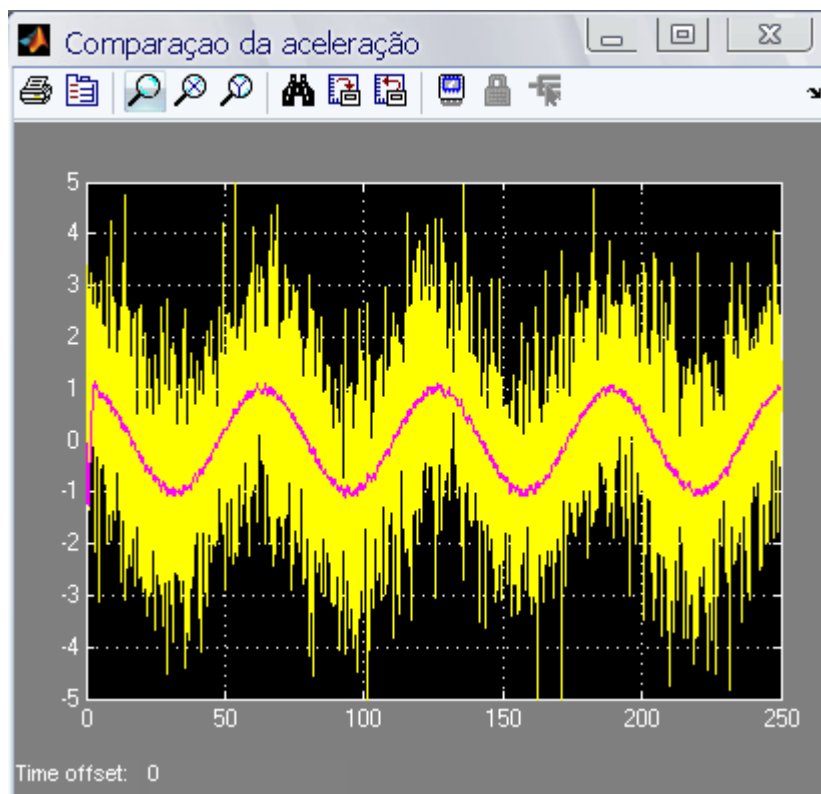
Na figura 22 é apresentado um bloco que representa um filtro de Kalman sem variável controlo. Este faz a estimação do valor da aceleração através dos valores medidos da velocidade. Considera-se a aceleração como uma variável não observável, ou seja, não é medida directamente.

Para definir os valores das várias matrizes presentes no filtro de estimação da aceleração, considera-se os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1e^{-6} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-4} \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} 1e^{-6} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-4} \end{bmatrix}$$

Para obter uma estimação da aceleração com pouco ruído considera-se que o erro associado ao modelo do sistema implementado no filtro é muito pequeno.

Na figura 23 é apresentado um gráfico que demonstra os valores de referência e estimados aceleração.



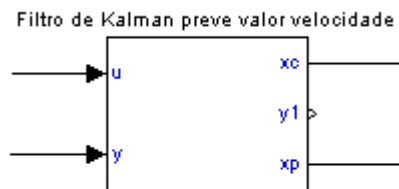
**Figura 23 Comparação dos valores da aceleração**

O gráfico da figura 23 relaciona a aceleração ( $m/s^2$ ), situada no eixo das ordenadas, com o tempo (segundos), situado no eixo das abcissas. Como se observa no gráfico os valores da aceleração estimados pelo filtro (cor-de-rosa) apresentam uma boa atenuação de ruído em comparação com os valores de aceleração utilizados como referência (amarelo). Verifica-se que o filtro faz uma boa estimativa dos valores da aceleração.

Neste caso observa-se o uso de duas capacidades do filtro. A primeira consiste na atenuação do ruído presente nos valores medidos. A segunda consiste na capacidade de estimar valores para variáveis não observáveis. Estas não são medidas directamente por equipamentos de medição.

### 4.2.2 ESTIMAÇÃO DA VELOCIDADE

Na figura 24 é apresentado o bloco do filtro que prevê valores da velocidade.



**Figura 24 Bloco FK que prevê o valor da velocidade**

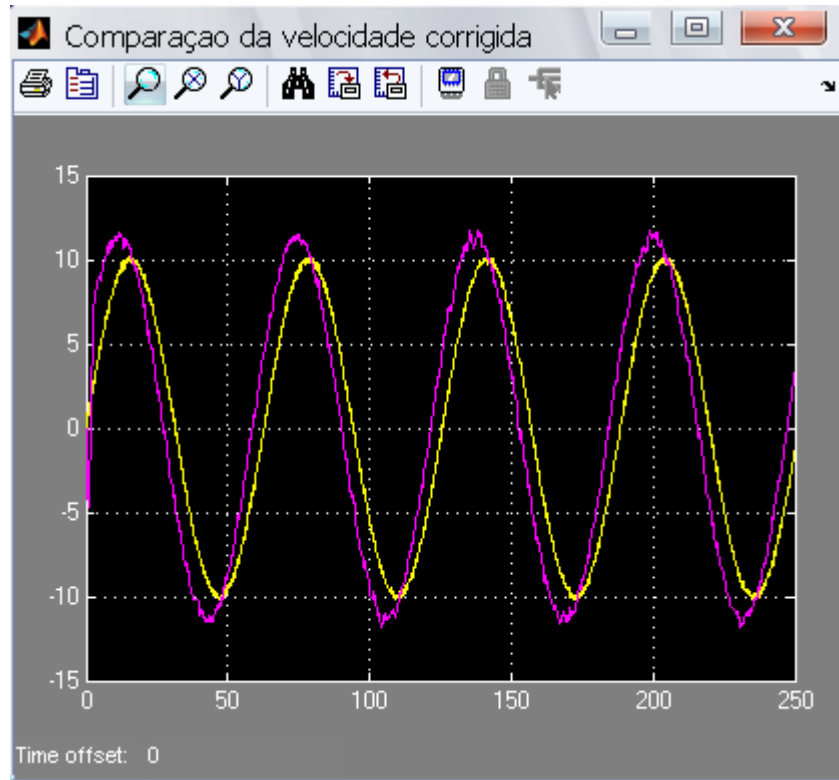
Na figura 24 é apresentado um bloco que representa um filtro de Kalman com variável controlo ( $u$ ). O filtro utiliza o seu modelo recursivo e o conhecimento dos valores medidos da velocidade e do valor da aceleração (variável controlo) para prever o valor da velocidade no instante seguinte.

Para definir os valores das várias matrizes presentes no filtro de previsão da velocidade, considera-se os seguintes valores:

$$A = [1] \quad C = [1] \quad B = [t] \quad R = [(0,01)^2] \quad Q = [(0,01)^2] \quad P0 = [(0,01)^2]$$

A matriz de controlo ( $B$ ) define a influência da aceleração no modelo do sistema. O valor “ $t$ ” define o tempo entre instantes. Através da atribuição de valores a “ $t$ ” pode-se prever o valor da velocidade no instante seguinte.

Na figura 25 é apresentado um gráfico que demonstra os valores de referência e previstos da velocidade.



**Figura 25 Comparação dos valores da velocidade**

O gráfico da figura 25 relaciona a velocidade (m/s), situada no eixo das ordenadas, com o tempo (segundos), situado no eixo das abcissas. Como se pode observar no gráfico que os valores da velocidade estimados pelo filtro (cor-de-rosa) antecipam os valores de referência (amarelo). Verifica-se que o filtro é capaz de prever os valores da velocidade.

Neste caso observa-se a capacidade do filtro em prever os valores. Para prever os valores de velocidade o filtro utiliza o seu modelo recursivo e o conhecimento dos valores medidos e dos valores da variável de controlo para calcular o próximo valor da velocidade.

Uma nota para o facto do valor de pico da velocidade prevista ser ligeiramente maior ao valor da velocidade utilizado como referencia. O erro situa-se entre 1 e 3 m/s para um



tempo ( $t$ ) de 2 s. Este erro resulta da consideração do valor estimado da aceleração actual no cálculo da velocidade do próximo instante.

Através dos resultados apresentados pela simulação conclui-se que os filtros de Kalman apresentam um bom desempenho na estimação dos valores da aceleração e na capacidade de filtrar e prever os valores da velocidade.

Os ruídos apresentados nos valores medidos foram atenuados.

Utilizando o Filtro de Kalman será possível fazer boas estimações dos valores da aceleração da velocidade e da posição para o cálculo da força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta, na unidade de controlo.

# 5 MODELO DO SISTEMA DE TREINO

Neste capítulo é desenvolvido o modelo do sistema de treino de ciclistas a partir do qual é realizado um conjunto de simulações.

## 5.1 MODELO DO SISTEMA DE TREINO

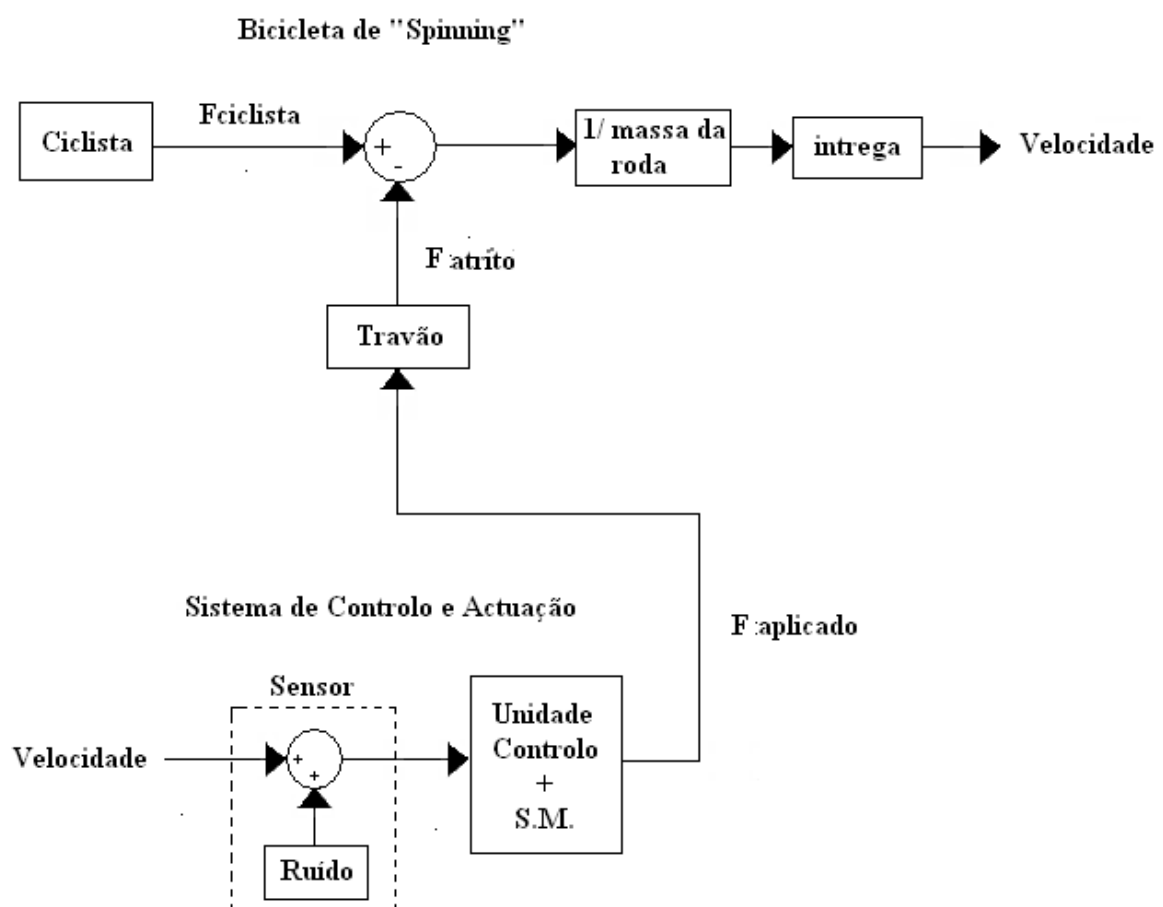
Nesta secção é estruturado um modelo de um sistema de treino, sendo este implementado no Matlab / Simulink. É realizado um estudo sobre a abordagem a realizar perante a estimação da força resistência ao movimento que servirá de referência á unidade de controlo do sistema de treino.

Como já foi referido no segundo capítulo, o sistema de treino é assente numa bicicleta de exercício (spinning) A força imprimida pela pessoa vai mover uma roda que possui uma determinada inércia. Para simular uma carga mecânica e variar o esforço produzido pela pessoa existe um pequeno travão que gera uma força de atrito e trava o movimento da roda

de inércia. Para variar a força aplicada sobre o travão utiliza-se um actuador electromecânico como um servo motor acoplado a um parafuso sem fim.

A unidade de controlo do sistema de treino estima os valores da força resistente ao movimento em função da velocidade medida na roda e determina a força a aplicar sobre o travão.

Na figura 26 é apresentado um diagrama de blocos do sistema de treino.



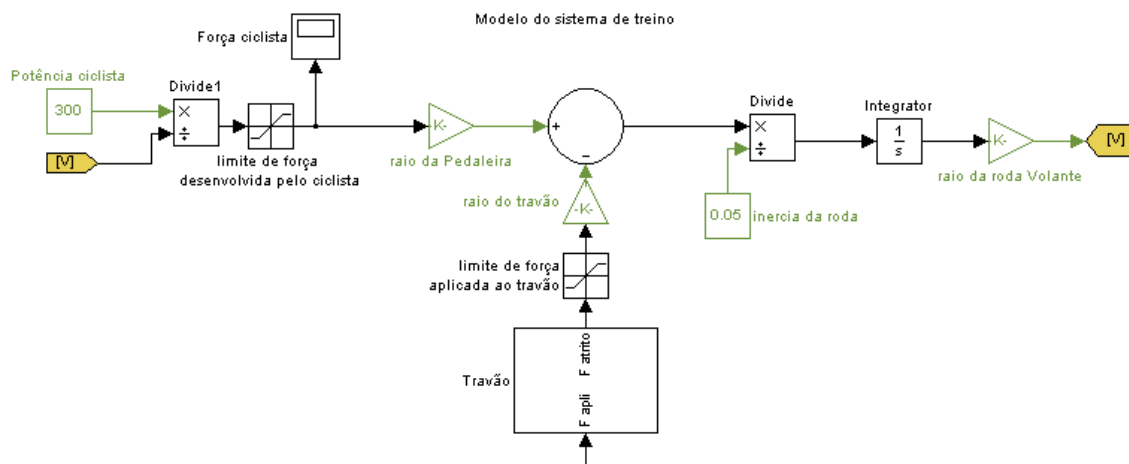
**Figura 26 Diagrama de blocos do sistema de treino**

Na figura 26 é apresentado o diagrama de blocos do sistema de treino modelado. O diagrama de blocos está dividido em duas partes. A primeira, definida com o nome de Bicicleta de “Spinning”, modela o sistema mecânico do sistema de treino. A segunda,

definida com o nome de Sistema de controlo e actuação, modela o sensor de velocidade, a unidade de controlo e o sistema de actuação do travão da bicicleta.

A velocidade da roda de inércia é a variável que vai ser medida. Os seus valores são utilizados na unidade de controlo para estimar a aceleração, a velocidade e a posição. Estes são necessários para efectuar os cálculos da força resistente ao movimento.

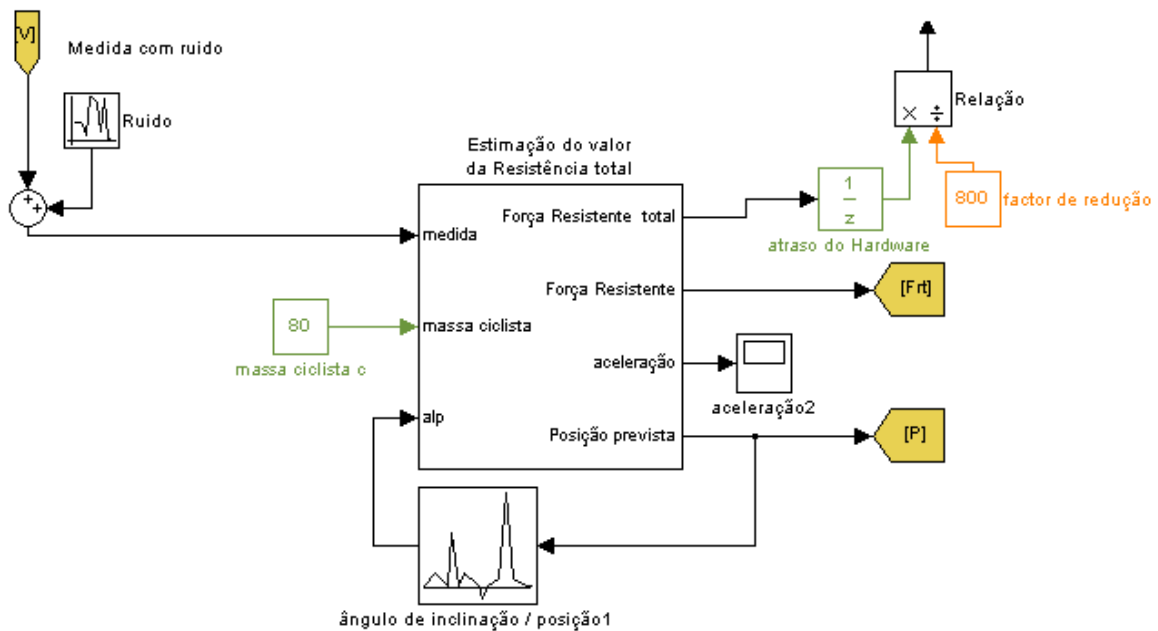
Na figura 27 está representado um modelo da roda inércia do sistema de treino.



**Figura 27 Modelo do sistema de treino, primeira parte**

Na figura 27 é apresentado modelo mecânico da Bicicleta de “Spinning”, do sistema de treino. A roda da bicicleta possui uma componente de inércia e relaciona os binários gerados pela força do ciclista e pelo atrito do sistema de travagem. Determina-se a velocidade a que se move a roda.

Na figura 28 está representado um modelo da unidade de controlo.



**Figura 28 Modelo do sistema de treino, segunda parte.**

Na figura 28 é apresentado o modelo do sistema de controlo e actuação do sistema de treino. O bloco da estimação estima os valores da força resistente ao movimento que servem de referência ao sistema de actuação. Este por sua vez actua sobre o travão.

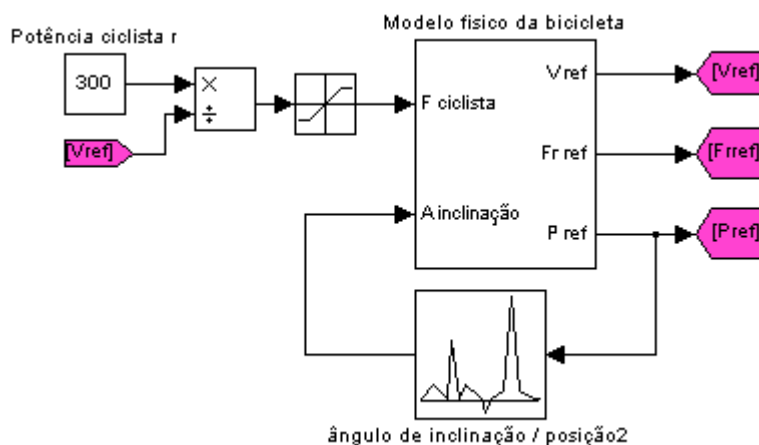
Associado ao bloco da estimação está associada uma tabela que define as características do percurso. É utilizada pelo bloco da estimação para determinar o valor da resistência de percurso. Esta abordagem foi demonstrada no capítulo 4.

Nesta parte estão outros dois blocos que definem a força aplicada pelo sistema de actuação. Um bloco gera um pequeno atraso que simula a inércia do sistema que actua sobre o travão do simulador. O outro bloco define um valor que representa a relação entre o valor calculado da força resistente ao movimento e a força a aplicar sobre o travão. Esta relação tem em conta as características físicas do sistema de travagem.

Para avaliar o desempenho do modelo é necessário comparar os valores da velocidade, da posição e da força resistente ao movimento do sistema de treino modelado com os valores de referência de um conjunto ciclista bicicleta.

Para efeito é utilizado um bloco que modela o conjunto ciclista bicicleta.

Na figura 29 está representado o modelo do conjunto ciclista bicicleta



**Figura 29 Modelo da bicicleta**

Na figura 29 é apresentado o bloco do modelo do conjunto ciclista bicicleta. Este bloco resulta do estudo do comportamento da bicicleta efectuado no terceiro e validado no quarto capítulo. Através do modelo do conjunto ciclista bicicleta é possível gerar valores de referência para a velocidade, a posição e a força resistente ao movimento.

## 5.2 ESTIMAÇÃO DA FORÇA RESISTENTE E RESULTADOS

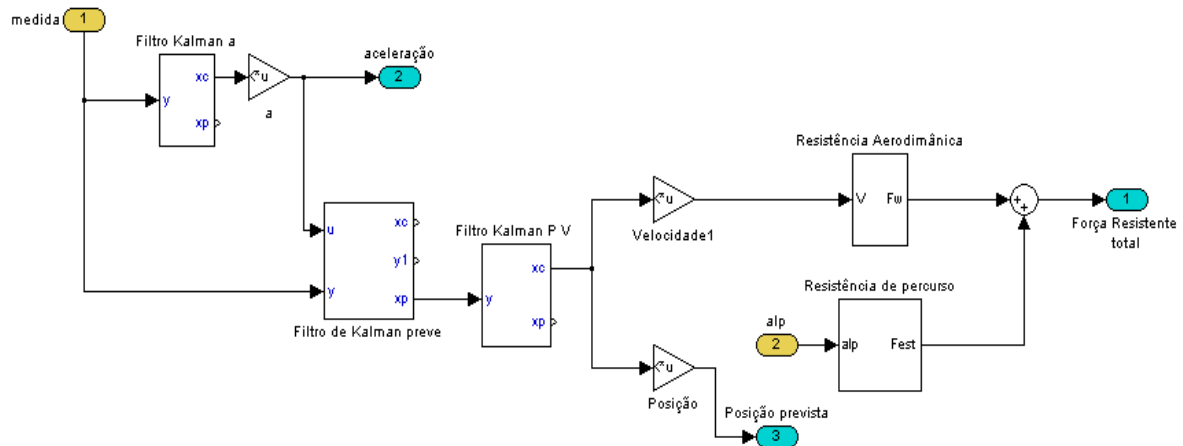
No modelo do sistema de treino é pretendido que os valores da velocidade produzidos na roda sejam semelhantes aos valores da velocidade do modelo do conjunto ciclista bicicleta. Desta forma sabe-se que o sistema é capaz de simular com uma fiabilidade um treino de bicicleta.

Para atingir este objectivo é necessário estimar os valores da velocidade, da aceleração e da posição de forma a calcular os valores da força resistente movimento e actuar atempadamente sobre o travão do sistema de treino.

Para estimar o valor da força resistente ao movimento e a aplicar uma força sobre o travão que controle o valor da velocidade na roda sistema de treino são definidas duas abordagens no cálculo da força resistente ao movimento, no bloco de estimação da força.

### 5.2.1 ESTIMAÇÃO DA FORÇA, SEM PONDERAR A INÉRCIA

Na figura 30 está representado uma estrutura da estimação da força resistente ao movimento.



**Figura 30** Controlo sem considerar a inércia

Na figura 30 é apresentado o conteúdo do bloco que faz a estimação da força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta. Do lado esquerdo da figura estão presentes os filtros que estimam os valores da aceleração, da velocidade e da posição. Do lado direito estão presentes os blocos que calculam as diferentes forças que compõem a força resistente ao movimento da bicicleta.

No modelo do sistema de treino existe um modelo do sensor, coloca na roda do sistema de treino. Este efectua medições de valores da velocidade que alimentam os filtros da estimação.

Num determinado instante é medido um valor da velocidade. Este chega aos dois filtros da unidade. Um filtro estima o valor da aceleração naquele instante e o outro filtro prevê o valor da velocidade para o próximo instante. É utilizado um terceiro filtro para prever o valor da posição. O valor estimado da velocidade permite o cálculo da Resistência Aerodinâmica.

Através de um vector que descreve o percurso, o valor previsto da posição fornece o ângulo de inclinação que permite o cálculo da Resistência de Percurso.

Nesta abordagem apenas se calcula o valor da força resistente ao movimento.

Considerou – se os seguintes valores para as matrizes dos filtros presentes na estimação dos valores.

Para o filtro da estimação da aceleração, as matrizes apresentam os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1e^{-10} & 1e^{-9} \\ 1e^{-9} & 1e^{-8} \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} 1e^{-10} & 1e^{-9} \\ 1e^{-9} & 1e^{-8} \end{bmatrix}$$

Considera-se que são efectuadas 10 medições de velocidade por segundo. Na estimação da aceleração o erro associado ao modelo é muito pequeno.

O ruído que afecta os valores medidos da velocidade varia ente 0% e 0,1 %.

Para o filtro da previsão do valor da velocidade, as matrizes apresentam os seguintes valores

$$A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} (0,02)^2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix}$$

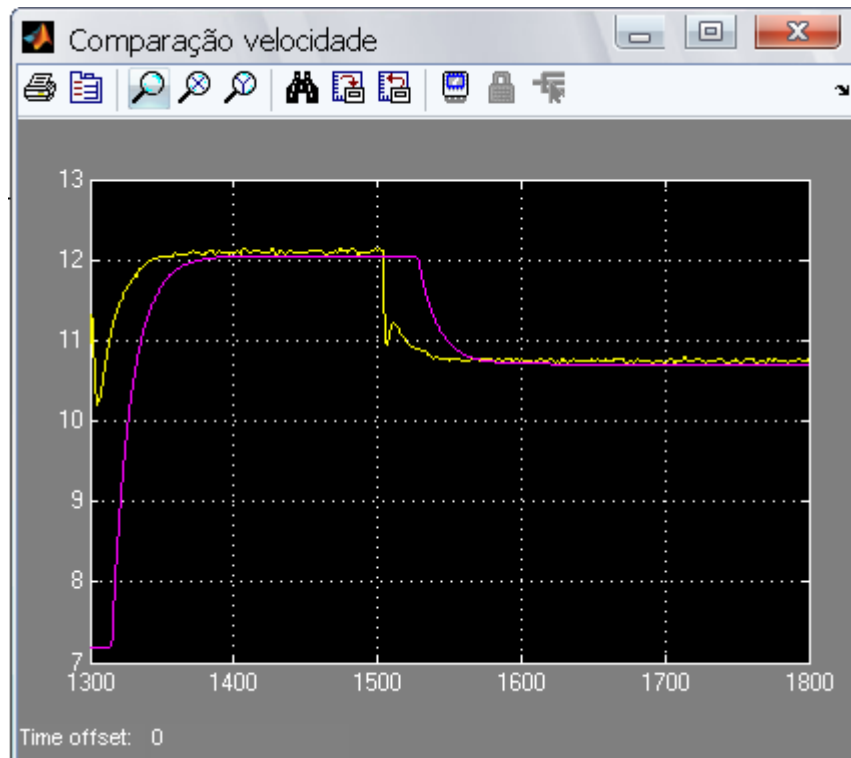
Para o filtro da estimação da posição, as matrizes apresentam os seguintes valores

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1e^{-5} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1e^{-5} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-5} \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} 1e^{-5} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-5} \end{bmatrix}$$

Estes valores têm por base o estudo realizado no capítulo 4. Verificou-se neste capítulo que a utilização de valores pequenos nas matrizes permitia uma boa atenuação do ruído presente nos valores medidos.

Na figura 31 está representado um gráfico que compara os valores das velocidades do sistema de treino e do modelo do conjunto ciclista bicicleta.





**Figura 31 Comparação das velocidades sem considerar a inércia**

O gráfico da figura 31 relaciona a velocidade (m/s) situado no eixo das ordenadas com o tempo (segundo) situado no eixo das abcissas. O gráfico compara os valores da velocidade do sistema de treino (amarelo) com os valores da velocidade do modelo conjunto ciclista bicicleta. Verifica-se algumas diferenças entre os valores.

A diferença entre os valores da velocidade é muito baixa, na ordem de 0,1 m/s. Existe um desfasamento temporal entre os valores na ordem dos 30 s.

Este desfasamento temporal resulta da diferença de inércia que existe entre a roda do sistema de treino e o modelo do conjunto ciclista bicicleta. Esta diferença de inércias resulta numa diferença na capacidade de aceleração e de desaceleração do sistema de treino.

Verifica-se que a utilização do valor da força de resistência ao movimento no controlo do sistema de treino não chega. Considera-se que neste caso o sistema de treino apresenta um desempenho fraco, porque não simula todas as características, de uma forma aceitável.

### 5.2.2 ESTIMAÇÃO DA FORÇA, PONDERANDO A INÉRCIA

Na figura 32 está representado uma estrutura de estimação da força resistente ao movimento que incorpora o efeito da diferença de inércia.

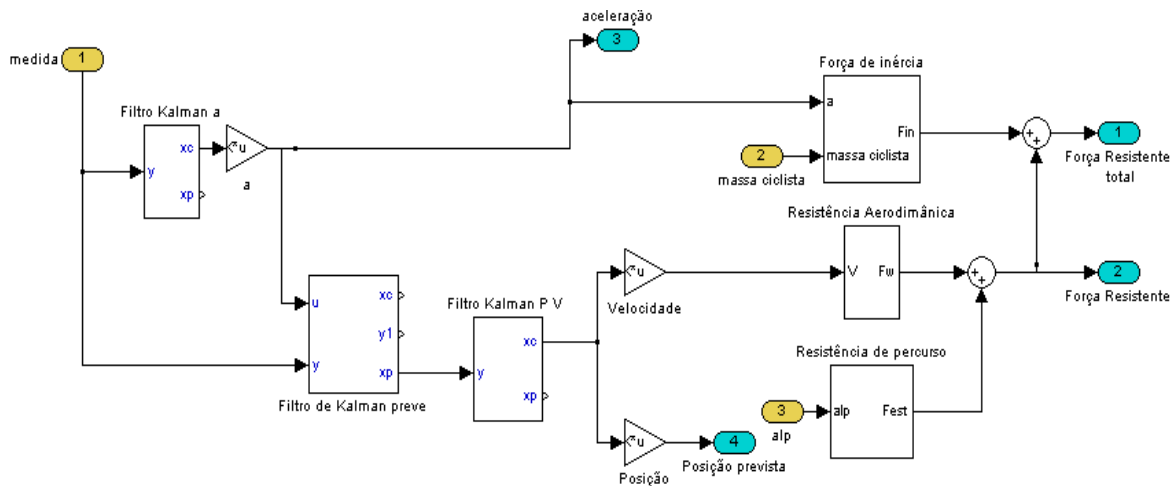


Figura 32 Controle considerando a inércia

Na figura 32 é apresentado o conteúdo do bloco que faz a estimação da força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta. Do lado esquerdo da figura estão presentes os filtros que estimam os valores da aceleração, da velocidade e da posição. Do lado direito estão presentes os blocos que calculam as diferentes forças que compõem a força resistente ao movimento da bicicleta.

Além do cálculo da força resistente ao movimento o bloco vai calcular uma força que vai compensar a diferença de inércia entre a roda do sistema de treino e o conjunto do ciclista bicicleta.

O valor estimado da velocidade permite o cálculo da Resistência Aerodinâmica. Através de um vector que descreve o percurso, o valor previsto da posição fornece o ângulo de inclinação que permite o cálculo da Resistência de Percurso.

O valor estimado da aceleração permite calcular uma força que vai compensar a inércia. Esta soma-se à força resistente ao movimento.

Considerou – se os seguintes valores para as matrizes dos filtros presentes na estimação dos valores.

Para o filtro da estimação da aceleração, as matrizes apresentam os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1e^{-10} & 1e^{-9} \\ 1e^{-9} & 1e^{-8} \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} 1e^{-10} & 1e^{-9} \\ 1e^{-9} & 1e^{-8} \end{bmatrix}$$

Considera-se que são efectuadas 10 medições de velocidade por segundo. Na estimação da aceleração o erro associado ao modelo é muito pequeno.

O ruído que afecta os valores medidos da velocidade varia ente 0% e 0,1 %.

Para o filtro da previsão do valor da velocidade, as matrizes apresentam os seguintes valores:

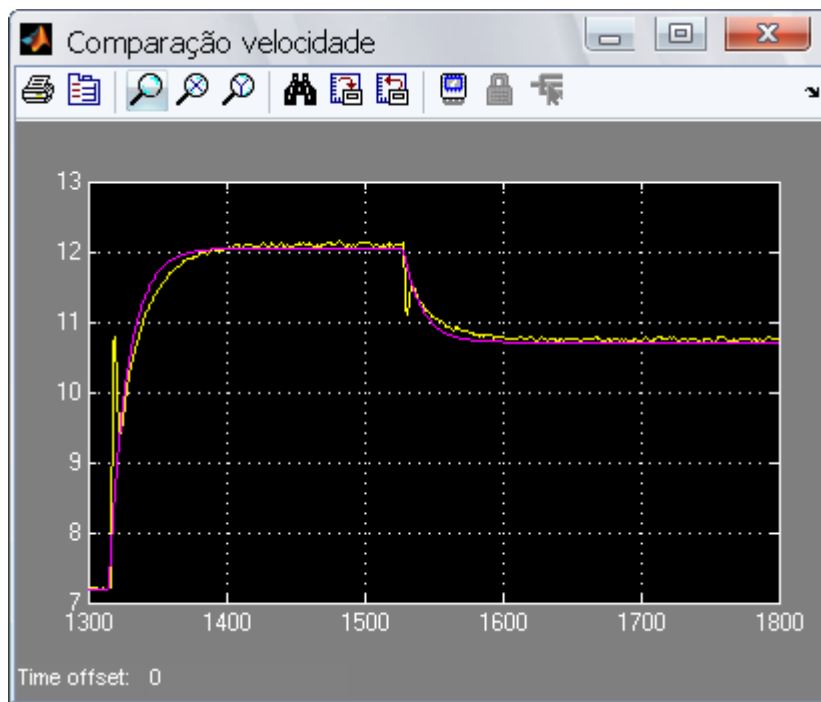
$$A = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} (0,02)^2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} (0,01)^2 \end{bmatrix}$$

Para o filtro da estimação da posição as matrizes apresentam os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1e^{-5} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1e^{-5} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-5} \end{bmatrix} \quad P0 = \begin{bmatrix} 1e^{-5} & 1e^{-5} \\ 1e^{-5} & 1e^{-5} \end{bmatrix}$$

Estes valores têm por base o estudo realizado no capítulo 4. Verificou-se neste capítulo que a utilização de valores pequenos nas matrizes permitia uma boa atenuação do ruído presente nos valores medidos.

Na figura 33 está representado um gráfico que compara as velocidades do simulador de treino, que pondera a diferença de inércia, e do modelo físico da bicicleta.



**Figura 33 Comparação das velocidades, ponderando a diferença de inércia**

O gráfico da figura 33 relaciona a velocidade (m/s) situado no eixo das ordenadas com o tempo (segundo) situado no eixo das abcissas. O gráfico compara os valores da velocidade do sistema de treino (amarelo) com os valores da velocidade do modelo conjunto ciclista bicicleta. Verifica-se que os valores estão bastante próximos.

A diferença entre os valores é muito baixa, na ordem de 0,1 m/s. Convém referir que existe algumas diferenças nas acelerações e desacelerações. Estas estão relacionadas com o problema da diferença de inércia.

Observa-se no gráfico que os valores da velocidade do sistema de treino modelado apresentam picos. Estes representam uma variação rápida da velocidade e resultam de dois factores. O primeiro é o ligeiro atraso no valor estimado da aceleração. O segundo é a consideração de um pequeno atraso que existe na aplicação da força no sistema de travagem.

Verifica-se que o sistema de treino com esta estrutura de estimação da força resistente ao movimento, compensando a diferença de inércia que existe entre a roda e o conjunto ciclista bicicleta, apresenta um desempenho bastante razoável.

Observa-se que o desfasamento temporal que existia no gráfico apresentado na figura 31 desapareceu com a introdução de uma força que compensava a diferença de inércia do sistema de treino. Os valores das velocidades apresentados são praticamente iguais.

Constatou-se que o ruído presente nos valores de velocidade medidos introduz algumas perturbações na estimação do valor da força resistente ao movimento da bicicleta.

Nesta secção conclui-se que a utilização de uma força que compensa a diferença de inércia do sistema de treino, considerada numa segunda estrutura do bloco responsável pela estimação da força, permite que o sistema de treino apresente valores de velocidade próximos dos valores reais. Verifica-se que os valores da força resistente ao movimento e da posição também apresentam boas estimativas.

# 6 CONCLUSÃO

## 6.1 CONCLUSÃO

O trabalho realizado nesta dissertação teve como objectivo conceber um sistema de treino de ciclistas. O sistema é baseado numa bicicleta de “Spinning” à qual é adicionada um sistema de accionamento ao travão e um sensor de velocidade da roda de inércia.

O teste foi feito recorrendo a um modelo do sistema desenvolvido em Matlab/Simulink. O modelo permitiu realizar simulações com diferentes perfis de utilização.

No sistema de controlo e actuação do sistema de treino teve especial atenção ao bloco que realizava a estimação da força resistente ao movimento. Neste bloco utilizou-se duas estruturas. A que apresentou um melhor desempenho foi a estrutura que considerava o cálculo de uma força que compensava a diferença de inércia que existia entre a roda de inércia do sistema de treino e o conjunto ciclista bicicleta.

Para realizar a estimação da força resistente ao movimento utilizou-se os filtros de Kalman. A sua utilização permite estimar as variáveis do sistema no instante  $t-1$ . Permite a estimação de valores das variáveis não observáveis. A sua simplicidade possibilita a

utilização em sistemas embebidos. Com o filtro é possível fazer boas estimações de valores da aceleração da velocidade e da posição para o cálculo da força resistente ao movimento do conjunto ciclista bicicleta

Verificou-se que os valores da velocidade do sistema de treino apresentam pequenas diferenças, na ordem de 0,1 m/s, comparativamente aos valores reais. Isto permite concluir que o sistema de treino modelado apresenta um bom desempenho.

## **6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHO FUTURO**

O trabalho realizado nesta dissertação permitiu conceber um sistema de treino de ciclistas. Por falta de tempo e de recursos não foi possível construir o sistema de treino.

O futuro deste trabalho passa pela implementação física do sistema de treino para ciclistas. A escolha dos diversos componentes apresenta-se como o próximo desafio.

Estes componentes devem ser estudados de forma a permitir um bom desempenho do sistema de treino. Deverão ser pouco onerosos com vista a uma economia nos custos.

Outro aspecto a abordar no futuro passa pelo aprofundamento do estudo e do detalhe do modelo do sistema de treino para ciclistas, nomeadamente deverá ser aprofundado o bloco que define o sensor de medição da velocidade, detalhando todas as interações do sensor.

No futuro poderão ainda ser estudadas outras formas de produzir atrito no sistema de treino, por exemplo o uso de actuadores electromagnéticos.







## Referências Documentais

- [1] JORGE, João— *Simulador de Voo de Investigação: Desenvolvimento e integração do módulo de controlo e de simulação dinâmica de uma aeronave* – Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Aeroespacial, Instituto Superior Técnico, Setembro de 2008.
- [2] LOPEZ, José— *Entrenamiento de Simulación para Ciclismo*
- [3] EHSANI, Mehrad; GAO, Yamin; GAY, Sebastian; EMADI, Ali—*Modern Electric, Hybrid and Fuel Cell Vehicles: Fundaments, Theory and Design*- CRC PRESS
- [4] GOMES, Nuno— *Forças que actuam nos veículos eléctricos.* – Disciplina de veículos eléctricos – Mestrado de Sistemas de Energia – Departamento de Engenharia Electrotécnica – Instituto superior de Engenharia do Porto, 2009
- [5] RIBEIRO, Maria—*Kalman and Extended Kalman filters: Concept, Derivation and Properties* – *Institute for Systems and Robotics* – Instituto Superior Técnico, February 2004
- [6] MAYBECK, Peter—*Stochastic models, estimation, and control.* - Department of Electrical Engineering – Air Force Institute of Technology – ACADEMIC PRESS, 1979.
- [7] WELCH, Greg; BISHOP, Gary—*An Introduction to the Kalman Filter* - Department of Computer Science – University of North Carolina at Chapel Hill, July 2006.
- [8] SIMON, Dan—*Kalman Filtering: Embedded Systems Programming.* June 2001.
- [9] MUNROE, Michael; HENCH, Ted; TIMMONS, Matthew—*Sales Rate and Cumulative Sales Forecasting using Kalman Filtering Techniques* March 2009.
- [10] ARAGAO, Tiago— *As “voltas” – ciclismo de estrada.* Tiagoaragao.com, 2002
- [11] PALMA, Ricardo; SANTOS, Nuno— *Sistema Biometrico de Esforço Físico Despendido por um ciclista – Projecto Final de curso.* Engenharia Electronica e Computadores – Departamento de Engenharia Electrotecnica – Escola Superior de Tecnologia.
- [12] SILVEIRA, Fernando— *Inclinação das ruas e das estradas.* Publicado na revista Física na Escola, São Paulo, 2007.
- [13] [www.uci.com](http://www.uci.com) – pesquisa realizada em Julho de 2010
- [14] [www.analyticcycling.com](http://www.analyticcycling.com) – pesquisa realizada em Julho de 2010
- [15] [www.MathWorks.com](http://www.MathWorks.com) – pesquisa realizada em Setembro de 2010

## Anexo A.

Neste anexo é demonstrado o princípio de funcionamento do filtro de Kalman.

Quando se estuda um sistema e o seu comportamento é necessários recorrer a dois passos. O primeiro passo consiste na caracterização física através da análise das leis que regem o sistema. Este conhecimento permite a construção de um modelo matemático que representa o sistema.

O segundo passo consiste na observação directa das variáveis do sistema. Esta observação é feita através de equipamento de medição (sensores).

Os valores apresentados pelo modelo matemático e pelos sensores de medida apresentam erros que prejudicam a análise do comportamento do sistema.

Normalmente, os modelos matemáticos não permitem a quantificação de todos os fenómenos presentes no sistema. Os sistemas reais apresentam perturbações difíceis de modelar o que limita a precisão dos modelos. Por outro lado os equipamentos de medição têm erros associados que deturpam os valores das variáveis do sistema. [6]

Os desvios de valores associados aos erros causados pelas limitações do modelo matemático e pelas informações incompletas dos equipamentos de medição condicionam a análise do desempenho do sistema.

Para mitigar estes desvios é realizado um tratamento estatístico. Especificamente, considera-se que os valores obtidos têm uma distribuição Gaussiana com um valor médio e um desvio padrão.

O modelo matemático permite calcular os valores das variáveis do sistema (variáveis estado) e definir o erro associado às suas próprias limitações (desvio padrão do modelo).

O equipamento de medição permite medir os valores de uma variável do sistema (variável medida), aos quais é possível associar um erro consequências do ruído presente nos valores medidos (desvio padrão da medida).

Combinando os desvios padrão é possível obter um conjunto de valores estimados com um menor desvio padrão. Estes valores estimados aproximam-se dos valores reais das variáveis do sistema. [6]

Durante este processo é possível estimar variáveis não observáveis com bastante precisão

A aplicação do FK implica os seguintes requisitos:

- O sistema deve ser descrito na forma de espaço estado de acordo com as expressões espaço-estado.
- O sistema deve ser linear.
- Os erros (ruídos) do modelo e de medição não se podem correlacionar. Os erros são considerados ruídos brancos com valor médio zero e com covariâncias de Q e R (distribuição normal de probabilidade).

$$p(\tilde{w}) \rightarrow N(0, Q)$$

$$p(\tilde{v}) \rightarrow N(0, R)$$

O erro entre o valor real ( $x_k$ ) e o valor estimado ( $\hat{x}_k$ ) das variáveis é reflectido no vector das variâncias ( $P_k$ ).

$$p(x_k / y_k) \rightarrow N(\hat{x}_k; P_k)$$

$$\hat{x}_k = E[x_k]$$

$$P_k = E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]$$

O FK faz previsão das variáveis estado, num determinado instante, utilizando o conhecimento do modelo e dos valores das variáveis em instantes anteriores. De seguida faz uma filtragem (correção) utilizando os valores medidos da variável medida.

Existem dois grupos de equações no filtro:

- As equações que fazem a previsão do valor, (time update - predictor)

$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1}$$

$$P_k^- = A P_{k-1} A^T + Q$$

- As equações que fazem a correcção do valor (measurement update - corrector)

$$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R^{-1})$$

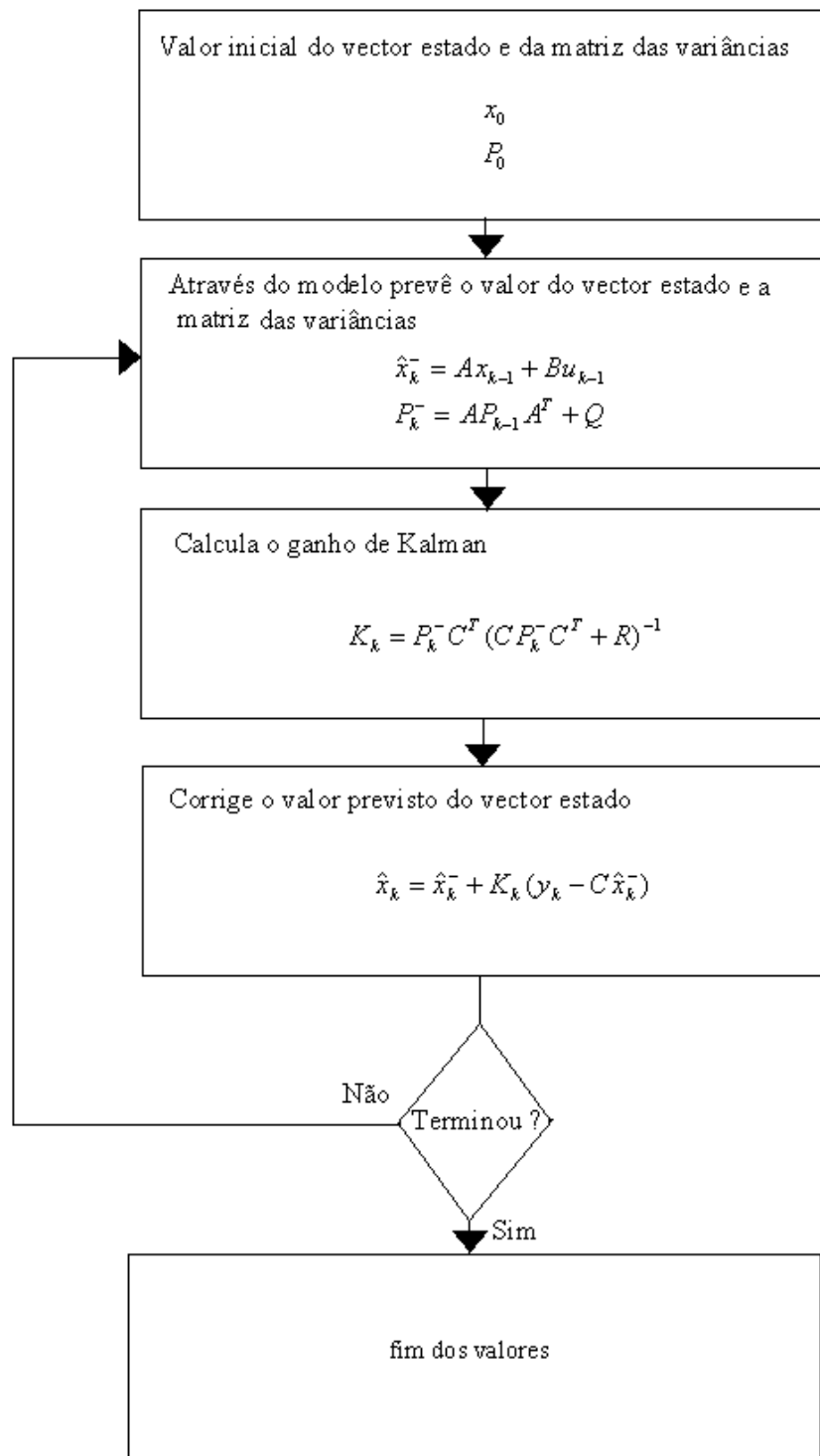
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C \hat{x}_k^-)$$

$$P_k = (I - K_k C) P_k^-$$

Em que  $\hat{x}_k^-$  representa o valor previsto para as variáveis de estado e  $P_k^-$  representa o valor previsto das variâncias dos valores das variáveis de estado. O  $K_k$  representa o ganho de Kalman e está associado aos valores das covariâncias dos valores medidos ( $R$ ).

Como se pode observar o valor estimado das variáveis estado ( $\hat{x}_k$ ) é igual a soma do valor previsto ( $\hat{x}_k^-$ ) mais um valor resíduo ( $y_k - C \hat{x}_k^-$ ) ponderado com ganho de Kalman ( $K_k$ ). Este resíduo introduzido pela medida reflecte a diferença entre o valor previsto para a medida e o valor actual da medida. O ganho de Kalman é determinante na correcção da estimativa.

Na figura é apresentado um fluxograma que descreve o modo de funcionamento de um filtro de Kalman: [9]



**Fluxograma do filtro de Kalman**

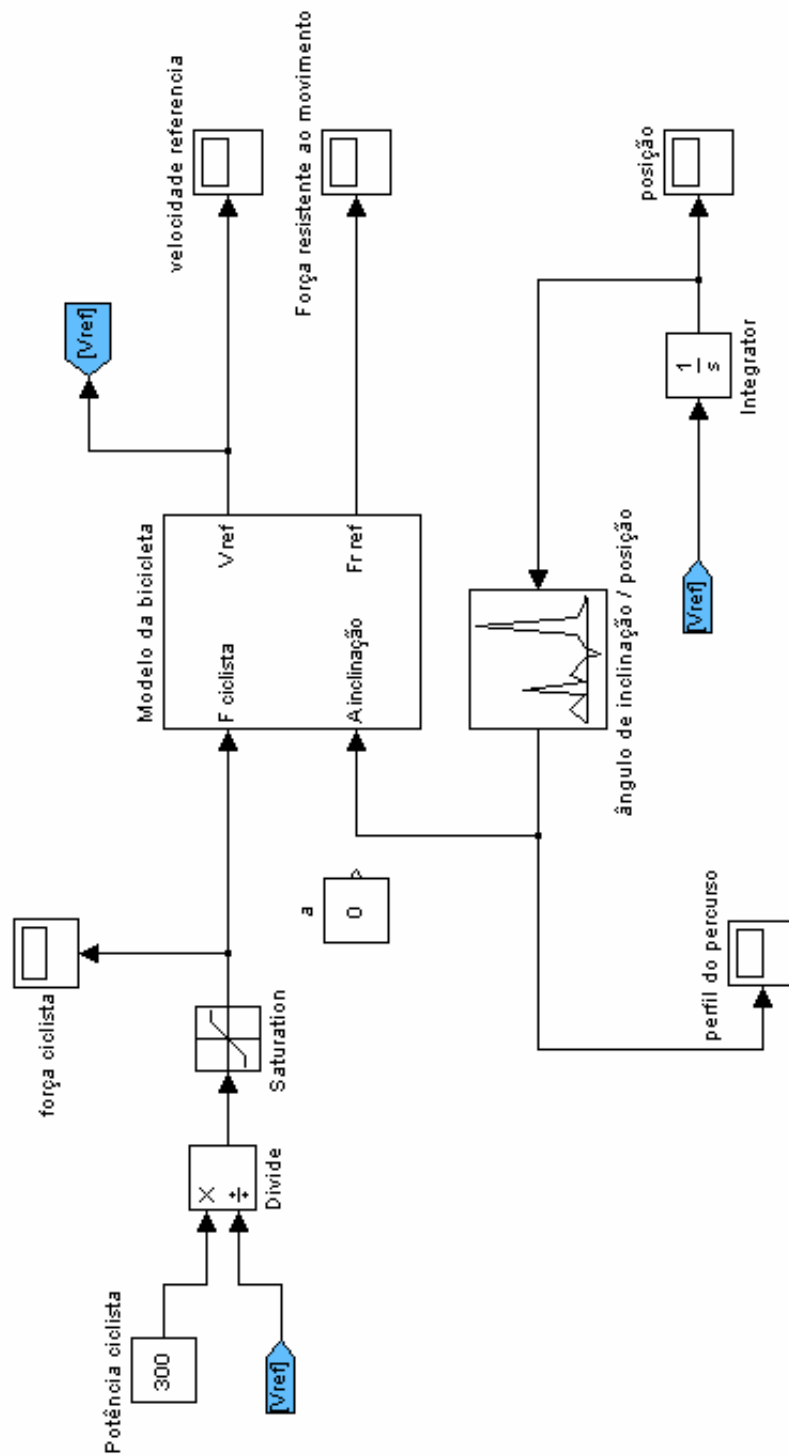
Como se pode observar na figura, o FK é bastante simples de utilizar e em poucos passos é possível fazer a estimação de valores. Como já foi referido a simplicidade do algoritmo do FK permite a sua utilização em sistemas informáticos com poucos recursos.



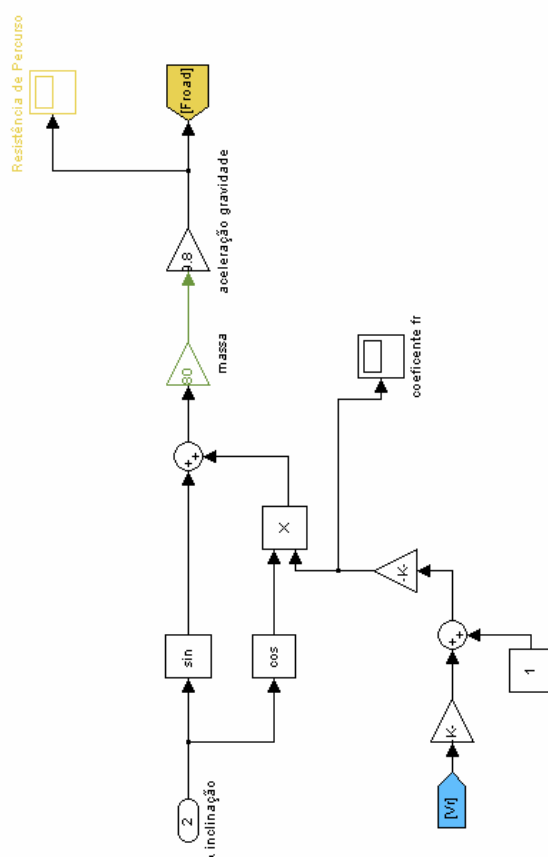
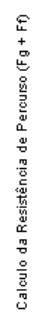
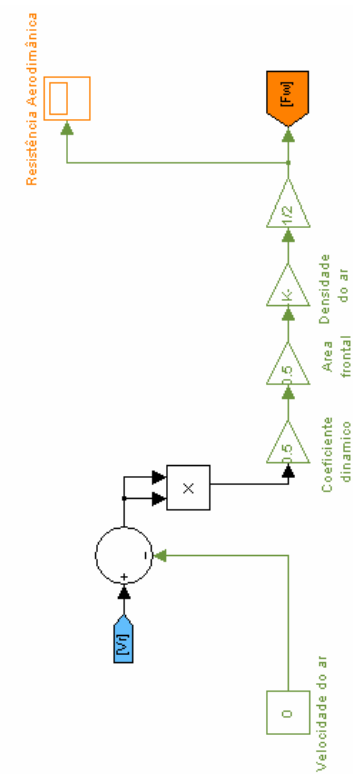
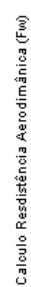
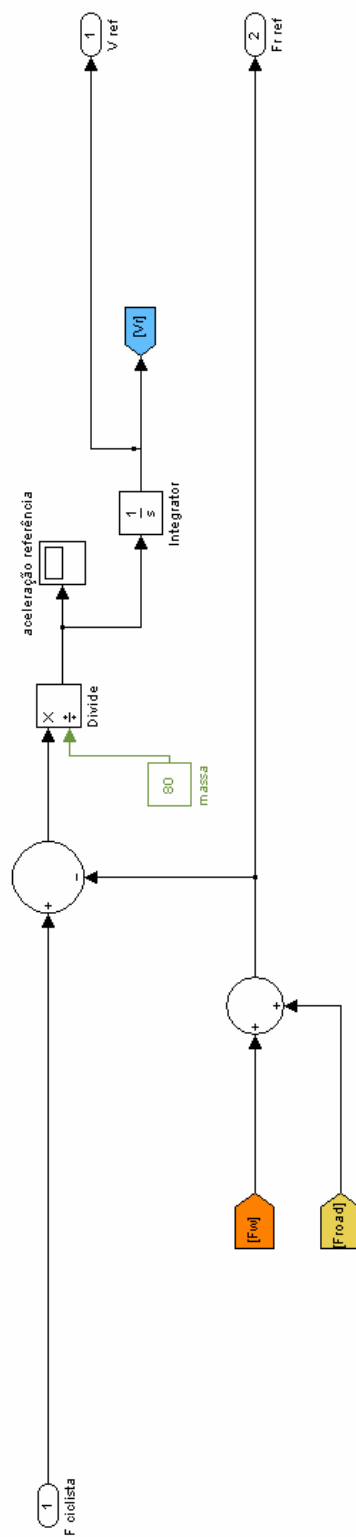
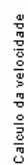
## Anexo B.

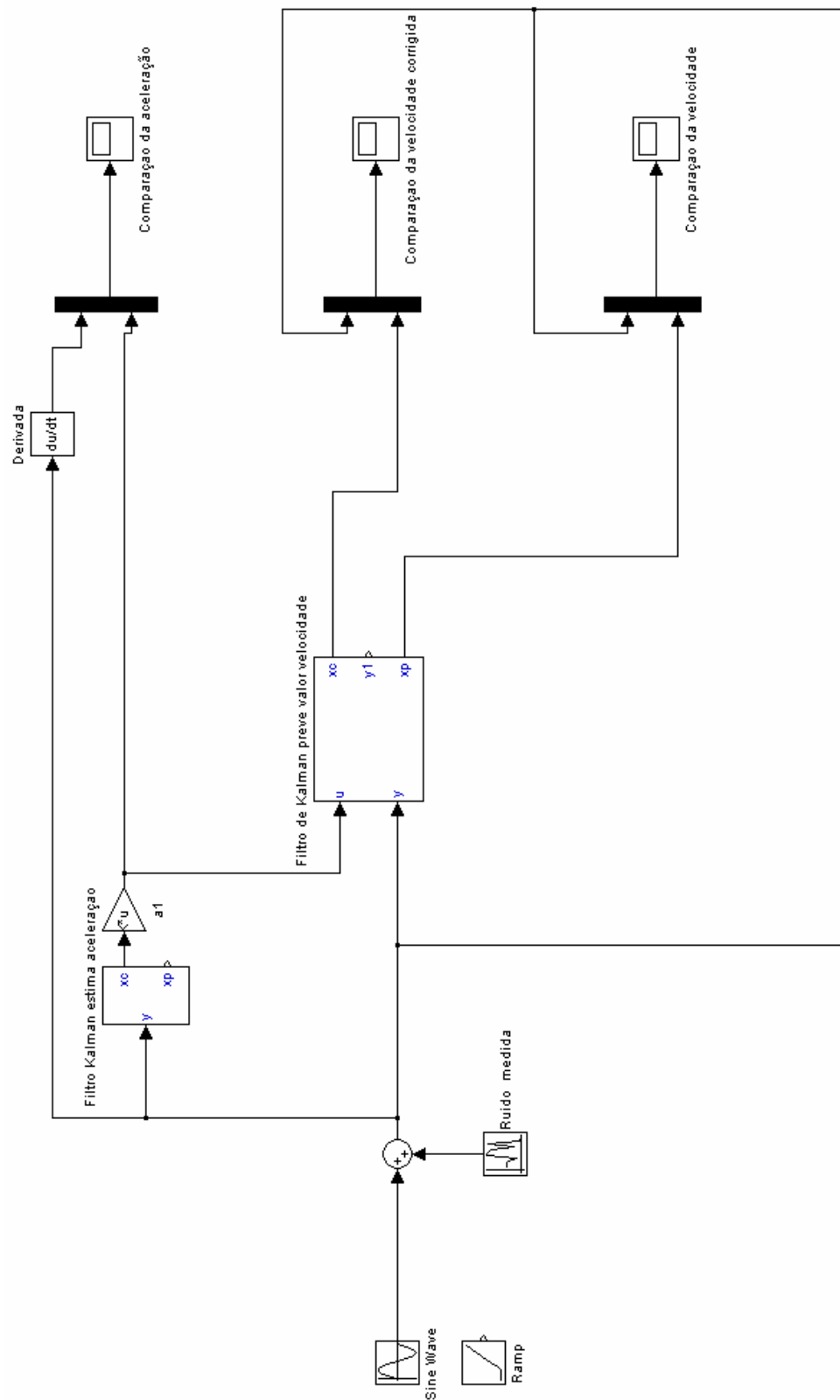
Neste anexo são apresentados a imagens completas dos modelos utilizados no estudo.





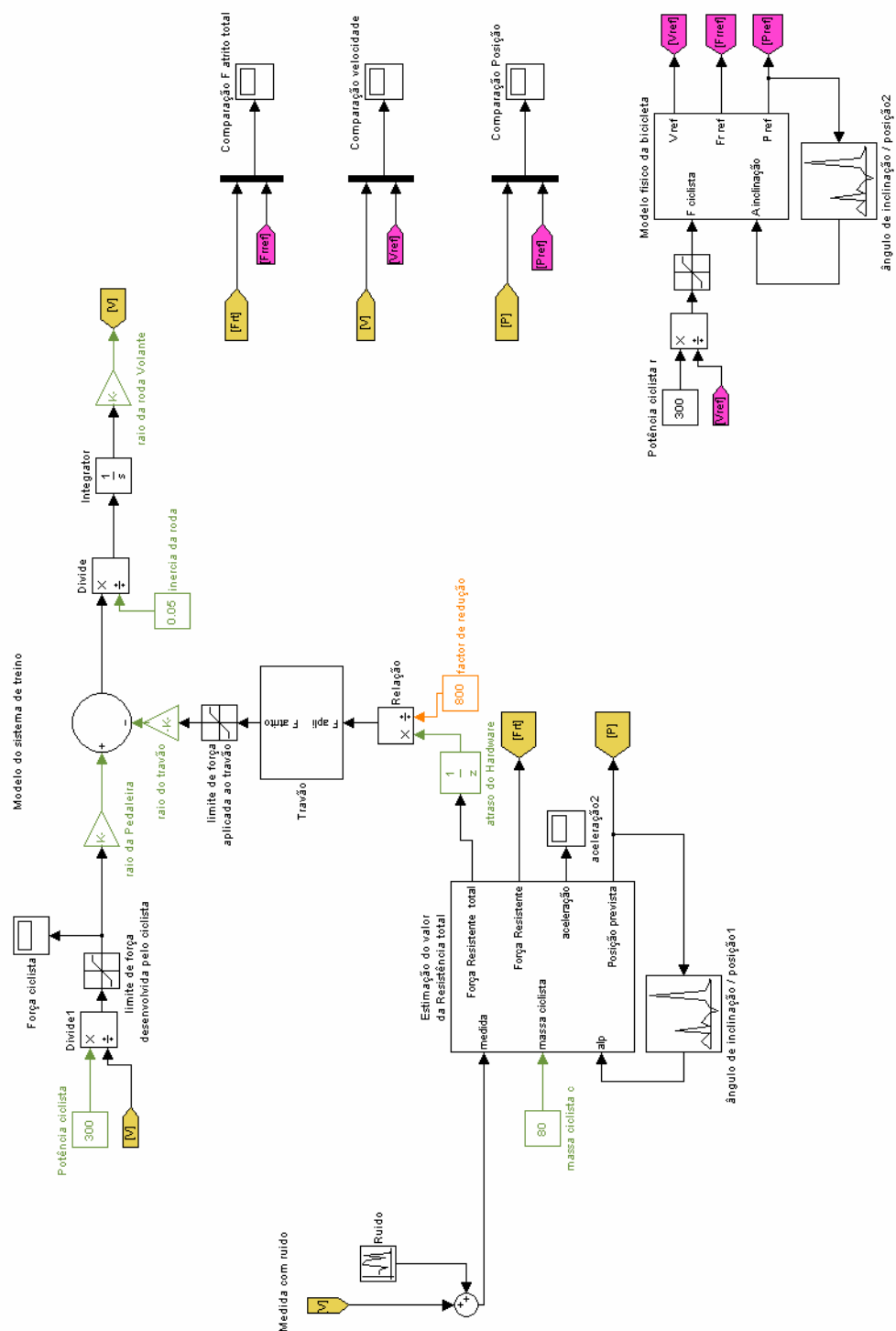
B1 – Modelo da Bicicleta





B3 – Filtro de Kalman





B5 – Modelo do Sistema de Treino de ciclistas

